

# Apuntes sobre control robusto y multiobjetivos de sistemas

Williams Colmenares M.  
Universidad Simón Bolívar  
Departamento de Procesos y Sistemas

Fernando Tadeo R.  
Universidad de Valladolid  
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática



**APUNTES SOBRE CONTROL ROBUSTO Y  
MULTIOBJETIVOS DE SISTEMAS**

Williams Colmenares  
Fernando Tadeo

©2005 **EDITORIAL EQUINOCCIO**

Todas las obras publicadas bajo nuestro sello  
han sido sometidas a un proceso de arbitraje.

Valle de Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda  
Apartado postal 89000, Caracas 1080-A, Venezuela  
Teléfono (0212)9063160/3162/3164, fax (0212)9063159

Hecho el depósito de ley  
Reservados todos los derechos

Coordinación editorial: Carlos Pacheco

Producción: Margarita Oviedo y Nelson González

Composición gráfica: Williams Colmenares y Grisel C. Boada Jiménez

Corrección: José Manuel Guilarte

ISBN 980-237-223-4

Depósito legal LF2442004600958

A Teresa y Hugo  
A Luisa Elena, Luis Carlos, Bruno, Daniel e Isabella



<b>I. Análisis de sistemas con múltiples objetivos</b>	<b>1</b>
I.1. Controladores multiobjetivo . . . . .	1
I.2. Sobre la norma de señales y sistemas . . . . .	2
I.3. Evaluación de las normas 2 e infinito de un sistema . . . . .	6
I.4. Desigualdades matriciales lineales . . . . .	8
I.5. Estabilidad robusta y desempeño nominal . . . . .	12
<b>II. Análisis y síntesis de controladores para sistemas con saturaciones</b>	<b>33</b>
II.1. Introducción . . . . .	33
II.2. Especificaciones de funcionamiento . . . . .	34
II.3. Análisis $\ell_1$ . . . . .	37
II.4. Estabilidad robusta . . . . .	37
II.5. Solución mediante programación lineal . . . . .	38
II.6. Control de un reformador de hidrógeno . . . . .	43
II.7. Método de cálculo basado en LMIs . . . . .	52
II.8. Resumen del capítulo . . . . .	55
<b>III. Síntesis de controladores mediante programación semidefinida</b>	<b>57</b>
III.1. Introducción . . . . .	57
III.2. Estabilidad cuadrática . . . . .	58
III.3. Sistemas con incertidumbre acotada en norma . . . . .	60
III.4. Sistemas poliédricos . . . . .	63
III.5. Condiciones menos conservadoras . . . . .	65
III.6. Diseño por realimentación de la salida . . . . .	66
III.7. Sistemas ciertos . . . . .	66
III.8. Sistemas con incertidumbre acotada en norma . . . . .	71
III.9. Sistemas con incertidumbre poliédrica . . . . .	80
<b>IV. Sintonización robusta de controladores industriales</b>	<b>91</b>
IV.1. Introducción . . . . .	91
IV.2. Los algoritmos PID . . . . .	92
IV.3. PID vía LMIs iterativas . . . . .	92
IV.4. El algoritmo ILMI . . . . .	93
IV.5. Comparación de técnicas de sintonización . . . . .	95
IV.6. Enfoque frecuencial . . . . .	97

<b>A. Factorización coprima</b>	<b>103</b>
A.1. Factorización coprima . . . . .	103
A.2. Parametrización de Youla . . . . .	105

---

## Presentación

---

Este libro trata sobre programación convexa aplicada al control. En particular, de la programación lineal y la semidefinida. Recientes desarrollos han despertado mucho interés en este campo, y entre ellos mencionamos los asociados con la teoría de control robusto y los métodos numéricos de puntos interiores. La primera permite estudiar en un marco unificado la incertidumbre sobre el sistema y sobre las perturbaciones externas. Los segundos permiten resolver de manera muy eficiente problemas convexos. Además, y esperamos convencer de ello al lector que con paciencia avance por el libro, es muy grande el campo de las aplicaciones de la programación convexa en el control.

En estos apuntes nos concentramos en el diseño de sistemas de control para sistemas lineales invariantes en el tiempo, a los que imponemos múltiples objetivos en el desempeño del lazo –cerrado– de control (e.g., estabilidad, rapidez, atenuación, sensibilidad). De particular interés son aquellos sistemas en los que la incertidumbre en el modelo o las perturbaciones externas son de tal magnitud que deben tenerse en consideración explícitamente. Así, en este trabajo analizamos sistemas con incertidumbre surgida de imperfecciones del modelo, típicamente representada por una función de transferencia que afecta globalmente al sistema en estudio. Además, analizamos incertidumbre asociada con los parámetros y de muy alta estructura. En cuanto a las perturbaciones, al contrario del enfoque tradicional que presupone la forma y sólo desconoce el momento en la que afectará al sistema, únicamente asumiremos conocida alguna cota superior (e inferior si es el caso) de ella (e.g., energía, amplitud, ruido blanco).

En el caso de sistemas inciertos, estudiamos sistemas con incertidumbre acotada en norma y con incertidumbre poliédrica. Ambos tipos con implicaciones prácticas importantes. El enfoque de partida es el cuadrático, esto es, siempre buscamos una función de Lyapunov común a todos los modelos que pueda tener un sistema. Desde el enfoque cuadrático, se derivan condiciones mucho menos conservadoras al encontrar ya no una sino diferentes funciones de Lyapunov. Ambos enfoques se basan en una representación del sistema en variables de estado. Esto pone al alcance del diseñador herramientas sumamente poderosas de análisis y síntesis de compensadores. Ventaja adicional de este marco (variables de estado) es que no se hace ninguna distinción en el tratamiento de sistemas MIMO o SISO.

En esa parte del trabajo (sistemas con incertidumbre) revisamos una serie de resultados de la ahora muy conocida teoría del control robusto y ponemos énfasis en un enfoque integrador de la misma. Uno de los aportes de este trabajo es sin duda la solución ofrecida al diseño con objetivos múltiples cuando no todos los estados están disponibles y solamente una parte de ellos puede retroalimentarse, usándose para control. Todos nuestros aportes están basados en el diseño de un controlador dinámico.

Tanto en el tratamiento de la incertidumbre como en el caso de las perturbaciones, el logro de los objetivos de

control se evalúa a través de la “norma” de una función de transferencia. Observe que hasta acá no hemos hecho ninguna distinción entre sistemas continuos y discretos; la razón es que, en general, se desarrollarán resultados para ambos tipos de sistemas con el enfoque propuesto (normas). Notable excepción es la norma  $\ell_1$  cuyo ámbito básicamente son los sistemas discretos y a cuyo estudio dedicamos un capítulo entero. A través de esta norma, se resuelve el problema de control robusto en el que la incertidumbre se describe en términos de magnitud.

Las herramientas fundamentales de desarrollo son las desigualdades matriciales lineales, que se obtienen de una aplicación de la fórmula del complemento de Schur. Con ellas se puede formular una serie importante de problemas como uno de programación convexa. De esta manera, problemas del ámbito de  $H_\infty$ ,  $H_2$ ,  $\ell_1$ , ubicación de polos en regiones, pasividad y otro buen número, encuentran un marco común de planteamiento. De allí que, en ocasiones, hablemos de “diseño multiobjetivos de sistemas”, ya que especificar condiciones de desempeño del tipo antes mencionado significa sumar (en realidad intersectar) colecciones de desigualdades matriciales lineales en búsqueda de un punto factible: el controlador.

También importante, en este trabajo proponemos un par de enfoques para entonar controladores industriales con estructura estándar, siempre en el ámbito de la programación convexa.

El objetivo del libro es poner al alcance del lector conocimiento y técnicas de la programación lineal y semidefinida que se aplican al análisis y diseño de sistemas de control. Como la lista de aplicaciones es extensa, en muchos casos hacemos demostración rigurosa de algunos resultados y dejamos al lector el desarrollo de la extensión a otros casos; por ejemplo, se demuestra estabilidad y se deja para el lector las demostraciones de ubicación de polos,  $H_2$ , etc.

El libro está originalmente pensado para cursos electivos de pre y postgrado en sistemas de control, específicamente sobre aplicaciones de la programación convexa o de métodos numéricos en control. También puede usarse en cursos básicos de sistemas de control, como complemento a las muy conocidas técnicas analíticas de diseño de controladores, en cursos de sistemas multivariantes y de control robusto.

En el capítulo I se sientan las bases teóricas que justifican los resultados presentados en los capítulos subsiguientes. En el capítulo II se presentan aplicaciones de la programación lineal al cálculo de controladores con restricciones de saturación, basadas en la norma  $\ell_1$ . En el capítulo III se presentan algunas aplicaciones de la programación semidefinida al cálculo de controladores  $H_\infty$ ,  $H_2$  y ubicación de polos. En el capítulo IV se presentan algunas aplicaciones específicas al cálculo de controladores tipo proporcional, integral y derivativo, ello por lo extendido del uso de este tipo de controladores. Los capítulos II, III y IV son independientes y, completado el estudio del capítulo I, el lector interesado puede ir directamente a cualquiera de ellos.

Este libro es fruto de la intensa cooperación científica que hemos sostenido entre la Universidad Simón Bolívar en Caracas, la Universidad de Valladolid en Valladolid y el Laboratoire d'Analyses et Architecture des Systemes (LAAS) en Toulouse. En particular, los autores desean expresar su agradecimiento a los colegas Ernesto Granado, Omar Pérez, Jacques Bernussou, César de Prada, Francisco del Valle, Maite Uría y Rosalba Lamanna. A la jefa de Producción de la Editorial Equinoccio, Margarita Oviedo, por su desprendido apoyo y a José Manuel Guilarte por su paciente corrección del estilo del libro. Igualmente, agradecemos a las instituciones que hicieron posible esa cooperación, a saber, los programas CYTED-RIII, PCP Automatique, PCP Optimización de Sistemas y FEDER. A las instituciones CICYT y FONACIT. Finalmente, agradecemos el financiamiento de la publicación que realiza el Ministerio de Educación y Ciencia Español, a través del proyecto CICYT DPI2004-07444-C04-02, y a la Universidad Simón Bolívar, a través de la Editorial Equinoccio y de la Dirección de Cultura.

Williams Colmenares, en Caracas, y Fernando Tadeo, en Valladolid



---

## Análisis de sistemas con múltiples objetivos

---

### I.1. Controladores multiobjetivo

El diseño de estrategias de control que aseguren un número de objetivos (especificaciones) en un lazo de control ha sido objeto de intensa investigación y estudio, pasando en los últimos 50 años de ser un campo intuitivo y de sentido común (“de ingenio”) [Cor96], [AH95], a uno riguroso y formal en el que matemáticos e ingenieros encuentran tierra fértil.

Dentro de las disciplinas que conforman los sistemas de control, el estudio de los sistemas lineales invariantes en el tiempo ha conocido enormes avances y cambios en los paradigmas de su estudio, en parte por su simplicidad y propiedades que permiten la aplicación de poderosas herramientas matemáticas y en parte porque esos resultados pueden ser aplicados a un importante número de sistemas, incluyendo algunos muy complejos (e.g., multimodelos [CGP98], no lineales [BA95], etc).

De esta manera, el diseño de controladores para sistemas lineales ha evolucionado desde reglas muy simples de sintonización [ZN42], ajustes de margen de fase y de ganancia [Kuo95], [PH96], diseño basado en representaciones de estado como ubicación de polos [PH96], control óptimo, [AM89], LQG/LTR [DS81], diseño basado en el margen del módulo (u operador diferencia de retorno) [DFT92], basado en los valores singulares y control robusto [San89], [MZ89], [DGK89], llegando hasta los paradigmas basados en la manipulación de normas (de señales o de sistemas) y dentro de los que podemos mencionar  $H_\infty$ ,  $H_2$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\ell_1$ . Este enfoque se ve fortalecido con la posibilidad de ubicar los modos de un sistema, no en puntos exactos del plano “ $s$ ”, sino más bien en regiones del mismo (técnicas denominadas de *root clustering*) y a lo que también denominaremos ubicación de polos [CGP96].

Todo ello encuentra además un medio integrado de formulación en las desigualdades matriciales lineales (LMIs) [Boy94] que surgen de la fórmula del complemento de Schur, esto es, los problemas antes mencionados pueden formularse como un conjunto de esas desigualdades (LMIs).

Si, como demostraremos, los controladores  $H_2$  aseguran un buen rechazo al ruido y los controladores  $H_\infty$  funcionan bien, aun en presencia de incertidumbre asociada con dinámicas no modeladas y reflejadas sobre todo en altas frecuencias o en presencia de perturbaciones no conocidas pero acotadas en energía, y si el agrupamiento de polos permite especificar algunas características de la respuesta temporal del sistema, entonces entenderemos