

MODULACION DIGITAL BINARIA

Introducción.

Hasta ahora hemos estudiado la transmisión de señales digitales en banda base. En la práctica, bien sea por compartir el canal (por ejemplo el aire) o por poder usar antenas de dimensiones razonables, es necesario modular. Al modular se modifica la amplitud, la frecuencia o la fase de una portadora que puede ser una senoide, en función del mensaje. En el caso de que el mensaje sea una señal binaria esto se denomina modulación por cambio de amplitudes (ASK=Amplitude Shift Keying), modulación por cambio de frecuencias (FSK= Frequency Shift Keying) o modulación por cambio de fase (PSK= Phase Shift Keying).

Antes de comenzar el análisis de cada modulación, repasaremos algunos conceptos de señales y sistemas que usaremos con frecuencia

Cuando teníamos una señal determinística $x(t)$ multiplicada por un coseno de amplitud, fase y frecuencia fijas, usamos el teorema de modulación para encontrar fácilmente su representación en frecuencia

$$Ax(t)\cos\omega_0t \rightarrow \frac{A}{2}[X(f-f_0) + X(f+f_0)]$$

En cambio cuando $x(t)$ es una señal aleatoria proveniente de un Proceso Ergódico y el Coseno ahora tiene fase aleatoria uniformemente distribuida entre $-\pi$ y π , se trabajaba con la autocorrelación hasta finalmente llegar a la DEP. Así

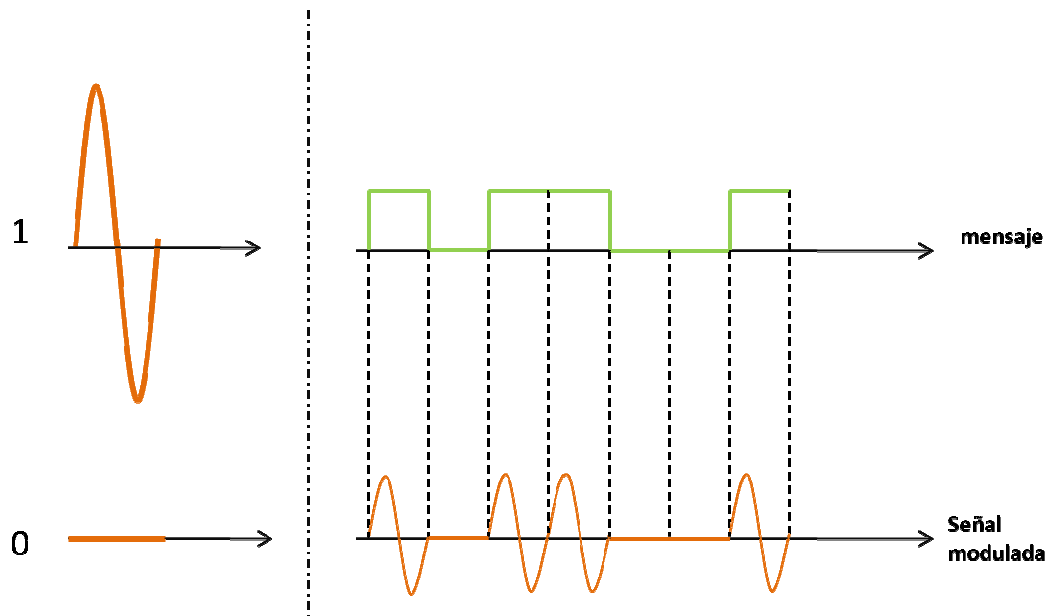
$$Ax(t)\cos(\omega_0t + \alpha) \rightarrow R(\tau) = \frac{A^2}{2} R_x(\tau)\cos(\omega_0\tau) \rightarrow G(f) = \frac{A^2}{4} [G_x(f-f_0) + G_x(f+f_0)]$$

A continuación analizaremos las características más resaltantes de estos tipos de modulación como son: La potencia, la Densidad Espectral de Potencia o DEP, el ancho de banda, moduladores y demoduladores y la probabilidad de error.

ASK: Modulación digital de amplitud.

Consiste en cambiar la amplitud de la senoide entre dos valores posibles; si uno de los valores es cero se le llama OOK (On-Off keying). La aplicación más popular de ASK son las transmisiones con fibra óptica ya que es muy fácil "prender" y "apagar" el haz de luz; además la fibra soporta las desventajas de los métodos de modulación de amplitud ya que posee poca atenuación. Otra aplicación es el cable transoceánico.

El modulador es un simple multiplicador de los datos binarios por la portadora. A continuación se ilustra un ejemplo de un mensaje en banda base y el resultado de modular en ASK(OOK).



ASK puede ser definido como un sistema con una señal para el "1" igual a $s_1(t) = \text{Sinusoide}$ y una señal para el cero igual a $s_0(t) = 0$.

Definamos una señal $b(t)$ que toma el valor de 1 cuando el bit enviado es un "1" lógico y -1 cuando el bit enviado es un "0".

La señal ASK puede expresarse como:

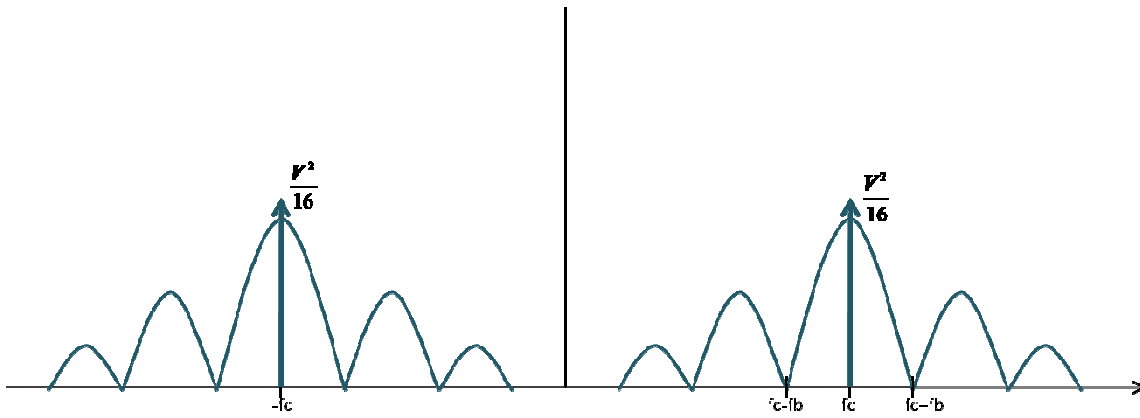
$$X_{ask}(t) = (1 + b(t)) \cdot \left(\frac{V}{2} \cos(\omega_c t)\right)$$

Como se observa $b(t)$ es una onda NRZ polar, por lo tanto su espectro, que es infinito, quedará trasladado a f_c . Como el espectro de $b(t)$ es un Sinc^2 con cortes cada $f_b = 1/t_b$, y como siempre se elige f_c mucho mayor que f_b , entonces el espectro de la señal ASK quedará:

$$X_{ask}(t) \rightarrow G_{ask}(f)$$

$$G_{ask}(f) = \frac{V^2}{16} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + t_b \text{Sinc}^2((f + f_c)t_b) + t_b \text{Sinc}^2((f - f_c)t_b) \right]$$

Si integramos esta DEP encontraremos que la potencia resulta $V^2/4$



Se observa que el ancho de banda práctico es $2f_b$ el cual es el doble del requerido en transmisión banda base. Otro parámetro que será muy útil sobre todo en modulación multinivel es la constelación que a continuación definiremos:

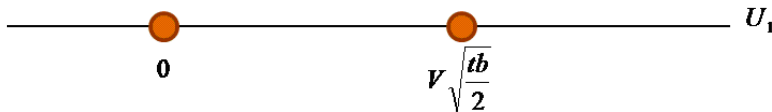
La constelación consiste en representar la señal modulada en función de una o varias funciones ortonormales (ortogonales de energía unitaria). En este caso, como uno de los símbolos es nulo queda claro que existe una sola base que es una senoide. Esa base debe tener energía unitaria.

$$1 = \int_0^{tb} K^2 \cos^2(\omega_c t) dt \Rightarrow K = \sqrt{\frac{2}{tb}}$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{2}{tb}} \cos(\omega_c t)$$

entonces:

$$S_{ask}(t) = \frac{V}{2} \sqrt{\frac{tb}{2}} (1 + b(t)) U_1(t)$$



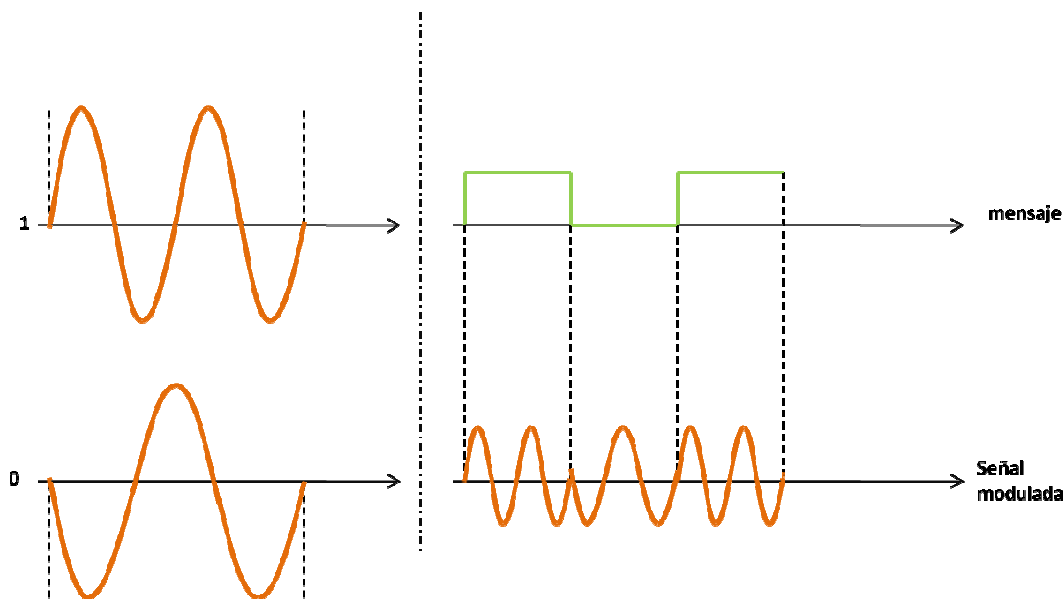
El resultado obtenido para la base es considerando que $f_c = n f_b$, es decir la frecuencia de portadora es múltiplo entero de f_b (en f_b cabe un número entero de ciclos de la senoide)

La distancia entre los posibles símbolos es muy importante, ya que representará la fortaleza que tiene la modulación frente al ruido. Observe que si los símbolos están más distanciados, será mas difícil que uno se convierta en otro por efectos del ruido añadido en el sistema.

FSK: Modulación digital de frecuencia.

Consiste en variar la frecuencia de la portadora de acuerdo a los datos. Si la fase de la señal FSK es continua, es decir entre un bit y el siguiente la fase de la senoide no presenta discontinuidades, a la modulación se le da el nombre de CPFSK (Continuous Phase FSK) y será la que analizaremos a continuación.

La siguiente figura ilustra un mensaje y la señal FSK resultante. Se observa que para el "1" lógico y para el "0" las frecuencias de los sinusoides son diferentes



Las dos frecuencias involucradas las llamaremos f_A y f_B , y se encontrarán alrededor de la frecuencia de la portadora (f_c) de acuerdo a las siguientes relaciones

$$f_A = \frac{(w_c + \Omega)}{2\pi}$$

$$f_B = \frac{(w_c - \Omega)}{2\pi}$$

De esta forma:

$$f_c = \frac{(f_A + f_B)}{2}$$

La ecuación que defina la señal modulada en FSK sería

$$X_{fsk}(t) = V \cdot \text{Cos}(2\pi(f_c + b(t)\Delta f)t)$$

$X_{fsk}(t)$ = Señal modulada.

$b(t)$ = señal binaria moduladora (volts). Puede tomar dos valores: +1 cuando el bit enviado es 1, y -1 cuando el bit enviado es 0.

V = Amplitud de la señal portadora (volts)

f_c = Frecuencia de la portadora (Hz)

Δf = Desviación máxima de frecuencia alrededor de la portadora. $f_A = f_c + \Delta f$; $f_B = f_c - \Delta f$

Entonces tenemos que si $b(t) = 1$:

$$X_{fsk}(t) = V \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t)$$

Pero, si $b(t) = -1$:

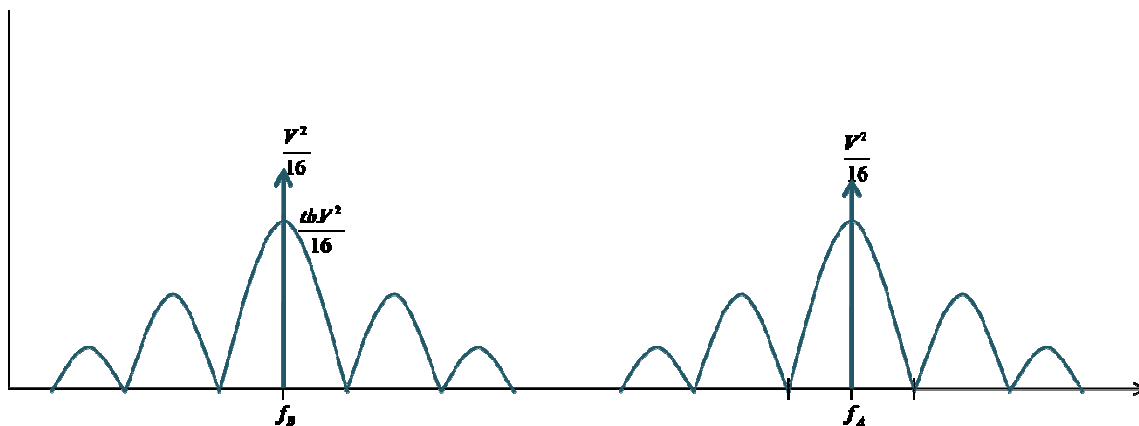
$$X_{fsk}(t) = V \cos(2\pi(f_c - \Delta f)t)$$

La Densidad espectral de potencia de la señal FSK puede obtenerse modelándola como la suma de dos señales OOK de frecuencias f_A y f_B

$$G_{fsk}(f) = \frac{V^2}{16} [\delta(f - f_A) + \delta(f + f_A) + \delta(f - f_B) + \delta(f + f_B)] +$$

$$\frac{V^2}{16} [tb \text{Sin}^2((f - f_A)tb) + tb \text{Sin}^2((f + f_A)tb) + tb \text{Sin}^2((f - f_B)tb) + tb \text{Sin}^2((f + f_B)tb)]$$

Se muestra a continuación solo el lado positivo de la DEP



El ancho de banda total de la señal es:

$$BW = (f_A - f_B) + 2f_b$$

Otra condición que generalmente se aplica es que las dos frecuencias sean ortogonales en un intervalo t_b . Es decir:

$$\int_0^{t_b} s_1(t)s_0(t)dt = 0 = \int_0^{t_b} \text{Cos}(2\pi f_A t)\text{Cos}(2\pi f_B t)dt =$$

$$\int_0^{t_b} [0.5\text{Cos}(2\pi(f_A + f_B)t) + 0.5\text{Cos}(2\pi(f_A - f_B)t)]dt =$$

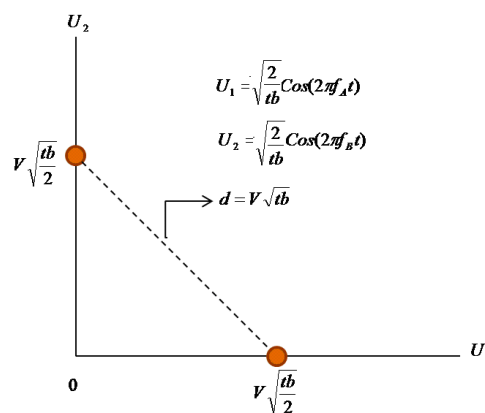
$$\int_0^{t_b} 0.5\text{Cos}(4\pi f_C t) + \int_0^{t_b} 0.5\text{Cos}(4\pi \Delta f t)dt$$

Si se elige la frecuencia de portadora de manera que en un intervalo de tiempo igual a t_b quepa un número entero de períodos (es decir $nt_c=t_b=(n/f_c=t_b)$) entonces $4\pi f_c t_b=4\pi n$; esto implica anular la primera de las dos integrales. Para anular la otra se debe cumplir que

$$4\pi \Delta f t_b = k\pi$$

$$\Delta f = \frac{k}{4t_b} = \frac{k}{4} f_b$$

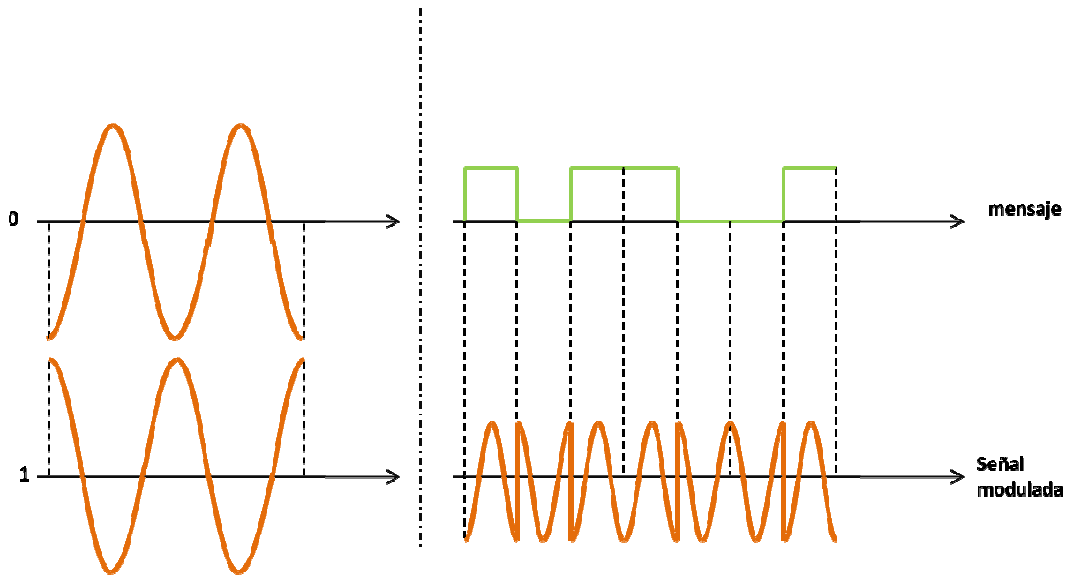
Si se cumple esta condición entonces las dos señales son ortogonales en el intervalo t_b . La constelación de la señal FSK ortogonal se construye luego de definir las bases ortonormales



PSK: Modulación digital de fase.

Aunque PSK no es usado directamente hoy en día, es la base para entender otros sistemas de modulación de fase multinivel. Consiste en variar la fase de la senoide de acuerdo a los datos. Para el

caso binario, las fases que se seleccionan son 0 y π . En este caso la modulación de fase recibe el nombre de PRK (Phase Reversal Keying). Observe, en la siguiente figura, una señal PRK:



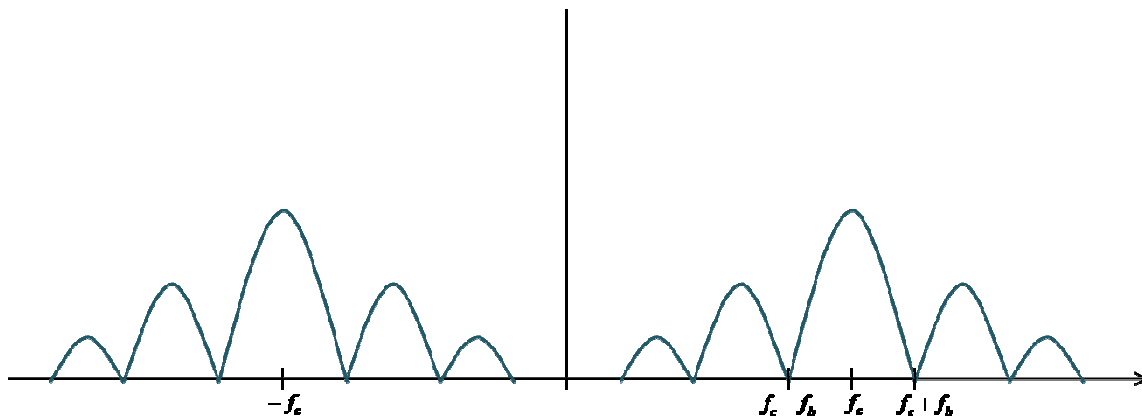
La expresión temporal de esta señal, en función de una señal binaria $b(t)$ NRZp sería

$$X_{prk}(t) = V.b(t).Cos(\omega_c t)$$

La densidad espectral de potencia DEP de la señal PRK viene dada por:

$$X_{prk}(t) \rightarrow G_{prk}(f)$$

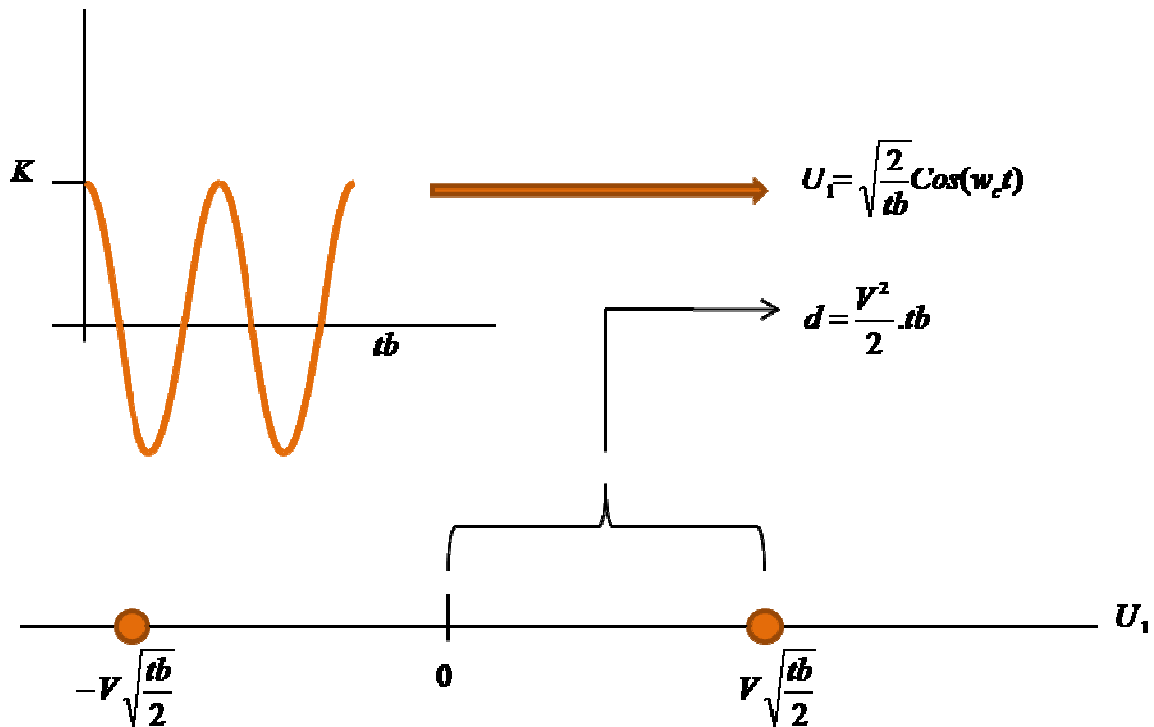
$$G_{prk}(f) = \frac{V^2}{4} [t_b Sinc^2((f + f_c)t_b) + t_b Sinc^2((f - f_c)t_b)]$$



PRK en el dominio de la frecuencia

El espectro es parecido al de ASK solo que no incluye las deltas de Dirac. Esto implica un ahorro de potencia. El ancho de banda resulta igual al de ASK o sea $2f_b$

Finalmente su constelación es:



Constelación de PRK

Ejercicio 1:

RESUELTO POR ABELIS SALAZAR

Noviembre 2010 Sección 02

Problema 3: (4 puntos) Se tiene una modulación FSK donde $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son ortogonales. Las frecuencias utilizadas son $f_B = 10.5 \text{ KHz}$ y $f_A = 11.5 \text{ KHz}$. Deduzca tres(3) valores que puede tener la tasa o velocidad de transmisión f_b ??

$$f_a + f_b = 2f_c = 22 \text{ kHz}$$

$$f_a - f_b = 2f_\Delta = 1 \text{ kHz} \rightarrow f_\Delta = \frac{1}{2} \text{ kHz}$$

Como hay ortogonalidad

$$f_\Delta = \frac{mf_b}{4}$$

$$\text{Si } m=1 \rightarrow f_{b1} = 2 \text{ kHz}$$

$$\text{Si } m=2 \rightarrow f_{b2} = 1 \text{ kHz}$$

$$\text{Si } m=3 \rightarrow f_{b3} = \frac{2}{3} \text{ kHz}$$

Ejercicio 2:

Comunicaciones II. UCAB. Parcial 1. Abril 2009(1)

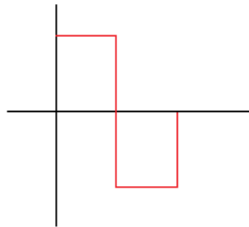
Resuelto por Ana Rojas

P4: (5 puntos) Una señal modulada depende de una secuencia binaria $b(t)$ que tiene las siguientes características: $b(t)$ es NRZ polar con potencia igual a N watts y de velocidad igual a N bits/segundo y con DEP $G_b = P_{tb} \text{Sinc} 2f_{tb}$.

La expresión de la señal modulada es

$$X_{mod}(t) = (\sqrt{P} - b(t)) * \text{sen}(20 * \pi * N * t)$$

Determine y DIBUJE con absoluta precisión la DEP de la señal modulada y calcule la potencia total



$$b(t) = A, -A$$

$$P = A^2 * \frac{1}{2} + (-A)^2 * \frac{1}{2} = A^2 * \frac{1}{2} + A^2 * \frac{1}{2} = A^2$$

$$P = N = A^2$$

$$A = \sqrt{N}$$

$$X_{mod}(t) = \sqrt{P} * \text{sen}(20 * \pi * N * t) - b(t) * \text{sen}(20 * \pi * N * t)$$

La DEP de la señal NRZp está dada por:

$$Gb(f) = Ptb \text{sinc}^2(ftb)$$

Como está multiplicada por un seno, el sin2 queda centrado en la frecuencia de corte.

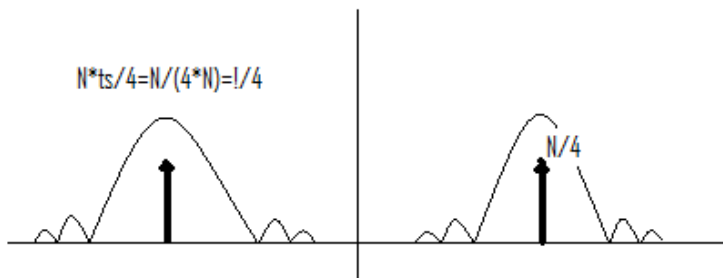
La DEP de un seno está dada por dos deltas centrados en la frecuencia de corte y de amplitud igual a la amplitud del seno al cuadrado entre cuatro.

$$G_{xmod}(f) = \frac{(\sqrt{N})^2}{4} * [\delta(f - fc) + \delta(f + fc)] + \frac{(\sqrt{N})^2}{4} [tb \text{sinc}^2[(f - fc)tb] + tb \text{sinc}^2[(f + fc)tb]]$$

$$wc - 20 * \pi * N$$

$$2 * \pi * fc = 20 * \pi * N$$

$$fc = 10N$$



$$(f - fc)tb = 1$$

$$f - fc = fb$$

$$f = fb + fc = N + (10 * N) = 11N$$

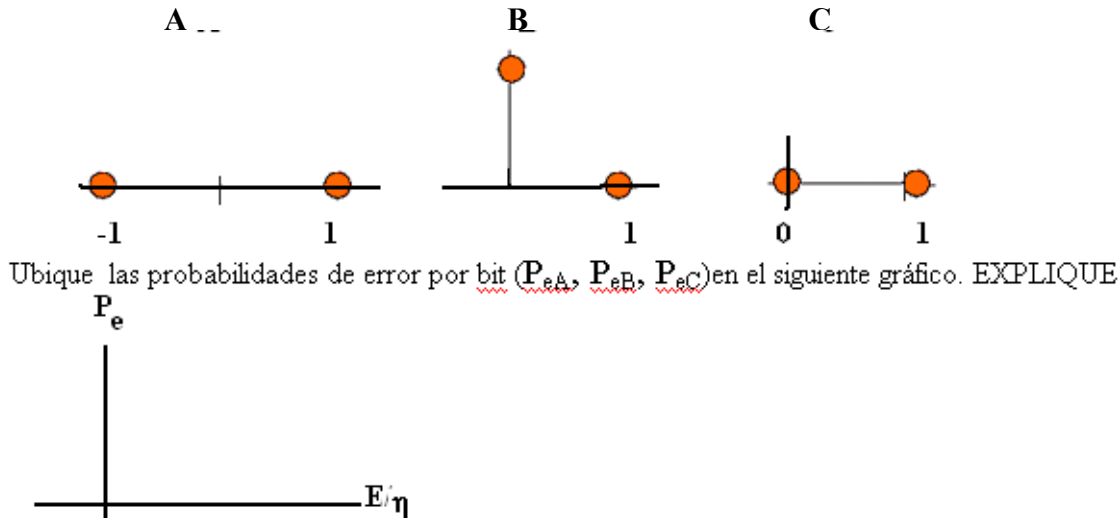
$$P = \frac{N}{4} + \frac{N}{4} + \frac{N}{4} + \frac{N}{4} = \frac{4N}{4} = N$$

Ejercicio 3:

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3. QUIZ 3 ENERO 2007

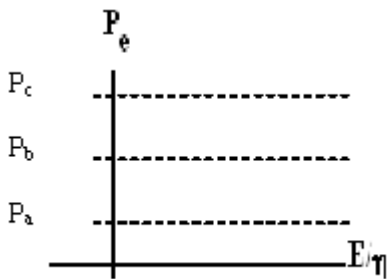
INTEGRANTES: Reinaldo May, José Manuel Mejias

Observe las siguientes constelaciones correspondientes a tres modulaciones A, B y C. Considere el mismo canal y receptor adaptado a cada caso.



Sabemos que la probabilidad de error viene determinada por la distancia entre las constelaciones. Entre mayor distancia tengan las constelaciones entre si, menor será la probabilidad de ruido.

Como podemos ver en las modulaciones, la modulación A tiene una distancia entre sus constelaciones de 2, la B de $\sqrt{2}$ y la C de 1. Por lo que en orden la Modulación A tendría menos probabilidad de error que la B y la B menor que la C. Y se ubicarían en el grafico de la siguiente forma:



Para el eje horizontal podemos obviar la η puesto que el ruido por ser el mismo canal y el mismo receptor será igual en los tres casos.

Con respecto a la energía, sabemos que es la suma de las distancias radiales al cuadrado de cada constelación por su probabilidad.

$$E_x = d_x^2 * P_x$$

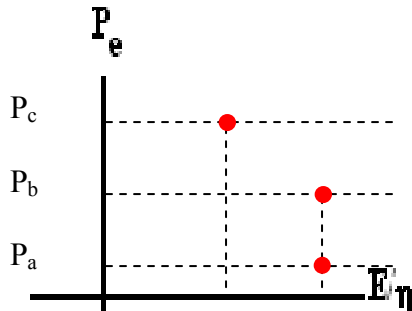
Entonces:

$$E_a = (1)^2 * (1/2) + (1)^2 * (1/2) = 1$$

$$E_b = (1)^2 * (1/2) + (1)^2 * (1/2) = 1$$

$$E_c = (1)^2 * (1/2) + (0)^2 * (1/2) = 1/2$$

Por lo que:

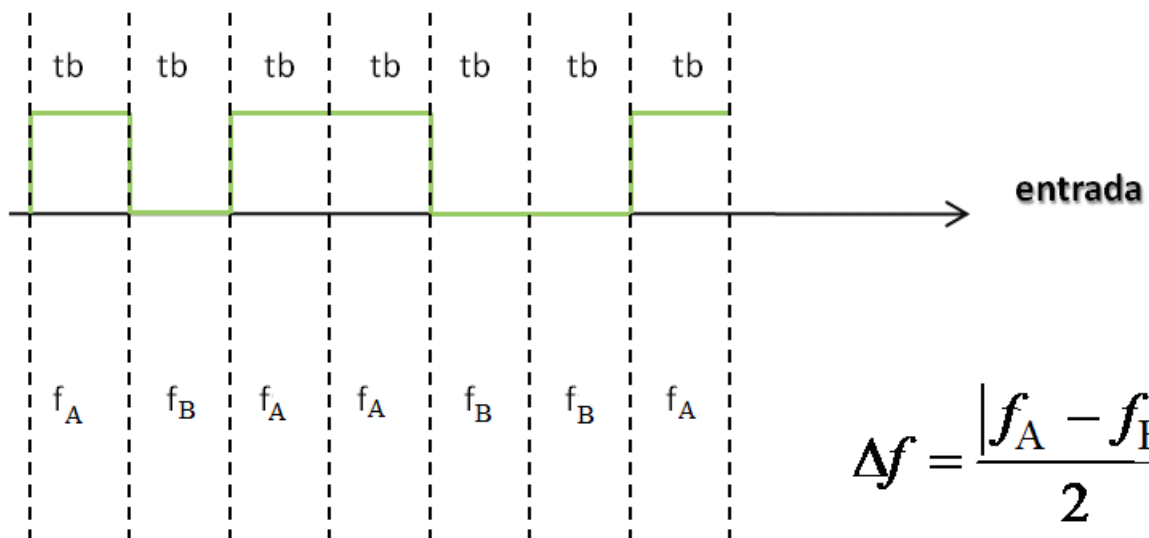


Lo que se puede observar es que la modulación A y B gastan el mismo nivel de Energía pero la B tiene más probabilidad de error que la A. La modulación C a pesar de tener la mayor probabilidad de error es la que menos Energía consume.

Minimum-Shift Keying (MSK)

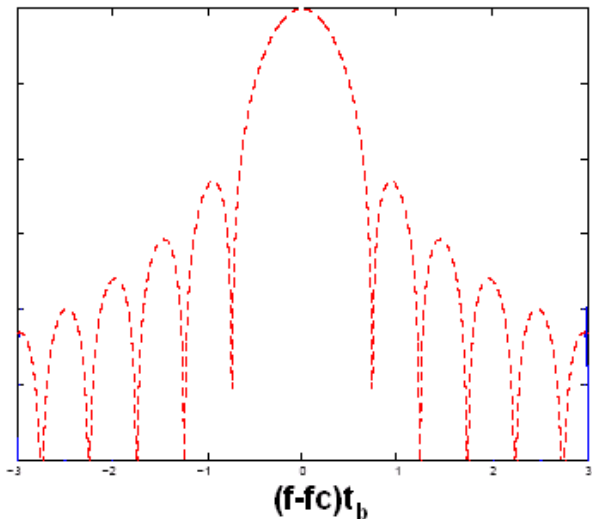
En la modulación digital FSK, cuando se tiene una señal binaria de entrada que cambia de **0** lógico a un **1** lógico (y viceversa), la frecuencia de la señal modulada en la salida se desplaza entre dos frecuencias que se encuentran separadas de la frecuencia de la portadora por la desviación de frecuencia Δf , de modo que

$$f_c \pm \Delta f$$



La modulación por desplazamiento mínimo (MSK) se da cuando la diferencia entre las frecuencias es igual a $f_b/2$.

La señal modulada luce como una señal FSK pero por estar tan cerca las dos frecuencias a veces es difícil diferenciarlas. La Densidad Espectral de Frecuencia luce diferente, presentando un menor ancho de banda ya que los dos Sinc al cuadrado se superponen. En la figura siguiente se puede observar un espectro MSK. Observe que el centro está en cero pero el eje es $(f-f_c)t_b$. Entonces cuando $(f-f_c)t_b=0$ es porque $f=f_c$. Cuando $(f-f_c)t_b=1$ es porque $f=f_c+f_b$. Observe que el ancho de banda es menor a $2f_b$ (es aprox. $1.5f_b$)



Ahora bien, existe otra forma de generar la señal MSK que resulta en un menor ancho de banda y gasto de potencia

Se toman los datos originales y se separan en dos secuencias que representen los bits pares y los bits impares. Estas secuencias serán más lentas que los bits originales ya que hay que esperar que pasen dos bits para tener un bit par y uno impar. La secuencia de bit pares se multiplica por $\text{Sen}(2\pi f_\Delta t)$. La secuencia de bits impares se multiplica por $\text{Cos}(2\pi f_\Delta t)$. En estas expresiones f_Δ es la distancia entre las dos frecuencias f_A y f_B , y f_c es la frecuencia de portadora

Luego la señal MSK1 se construye de acuerdo a la siguiente expresión:

$$X_{\text{MSK1}}(t) = x_{\text{par}}(t) \cdot \text{Sen}(2\pi f_\Delta t) \cdot \text{Cos}(2\pi f_c t) + x_{\text{impar}}(t) \cdot \text{Cos}(2\pi f_\Delta t) \cdot \text{Sen}(2\pi f_c t)$$

Cuando los bits son “0” se le asigna a x_{par} o x_{impar} -1 volt y a los “1” se les asigna 1 volt resulta lo siguiente:

Cuando $x_{\text{par}} = -1$ y $x_{\text{impar}} = -1$ la señal modulada es $-\text{Sen}(2\pi f_A t)$

Cuando $x_{\text{par}} = 1$ y $x_{\text{impar}} = 1$ la señal modulada es $\text{Sen}(2\pi f_A t)$

Cuando $x_{\text{par}} = -1$ y $x_{\text{impar}} = 1$ la señal modulada es $\text{Sen}(2\pi f_B t)$

Cuando $x_{\text{par}} = 1$ y $x_{\text{impar}} = -1$ la señal modulada es $-\text{Sen}(2\pi f_B t)$

Observe que aparecen, al igual que el MSK normal, las dos frecuencias ($f_A = f_c + f_\Delta$ y $f_B = f_c - f_\Delta$). También se observa que la constelación de este tipo de modulación puede asociarse a una modulación no binaria sino cuaternaria.

Quiénes controlan los cambios son dos señales (b_{par} y b_{impar}) que cambian **más lentamente**, lo que hace que el ancho de banda disminuya

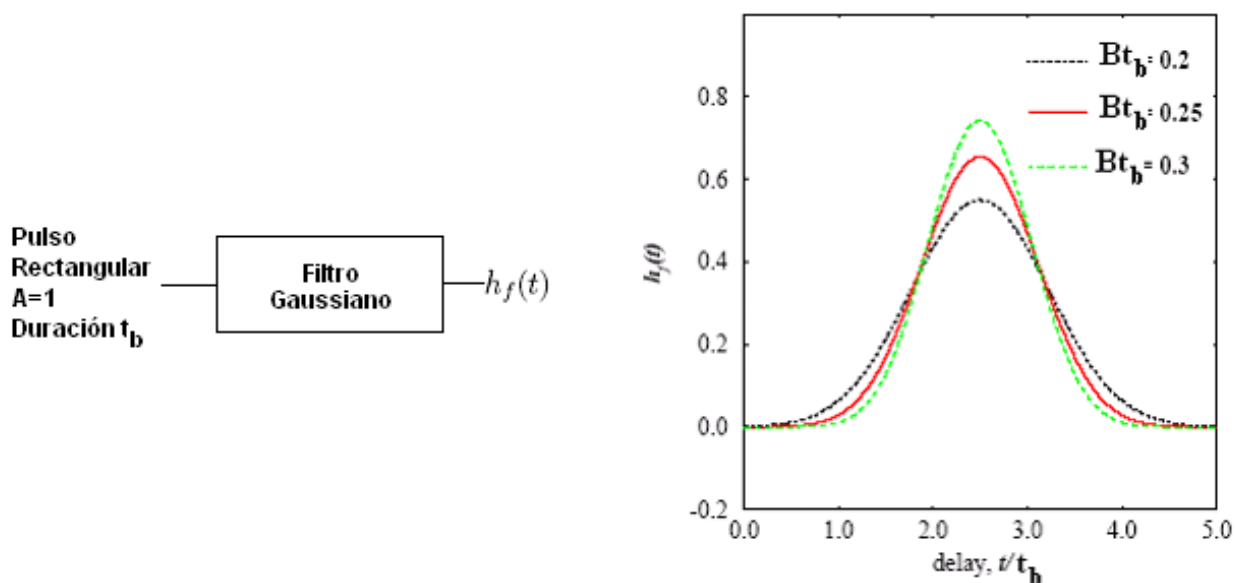
Gaussian Minimum-Shift Keying (GMSK)

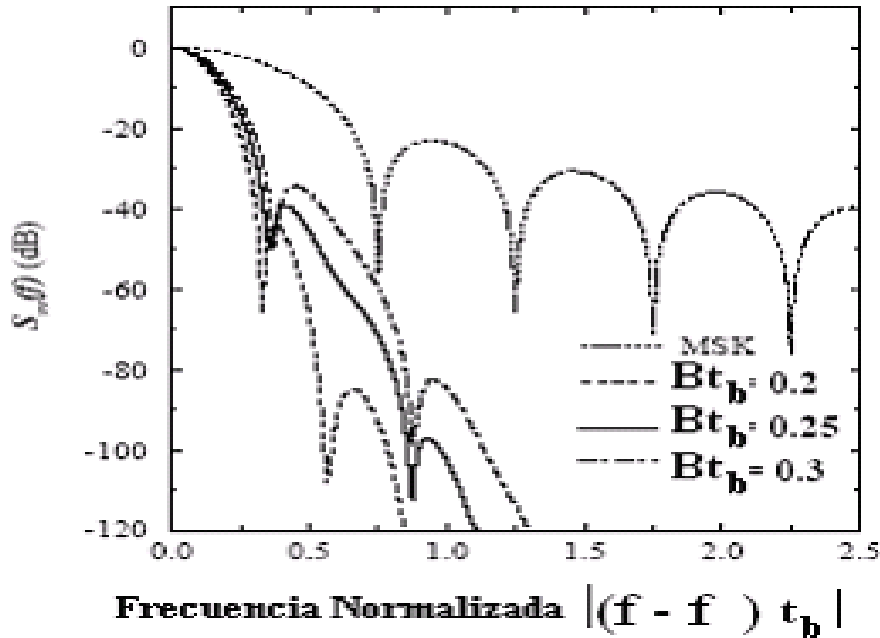
En las comunicaciones digitales, GMSK también representa un esquema de modulación por desplazamiento de frecuencia con fase continua. Es muy parecido a la modulación MSK, con la diferencia de que la señal digital binaria de entrada pasa primero por un filtro Gaussiano antes de ser modulada aunque podría también filtrarse luego de modular



$$H(f) = \exp \left\{ - \left(\frac{f}{B} \right)^2 \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

Esto provoca una reducción evidente en los lóbulos laterales del espectro de la señal modulada y en la interferencia entre portadoras de señales en canales de frecuencia adyacentes, con una consecuente reducción del ancho de banda comparada incluso con MSK. En la siguiente figura se observa la respuesta impulsiva de un filtro gaussiano. Debajo aparece una porción de las DEPs de modulaciones MSK con diferentes valores de Bt_b y a su vez comparado con la DEP MSK



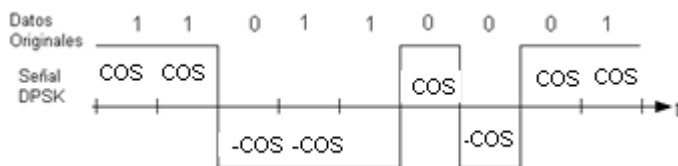


DPSK

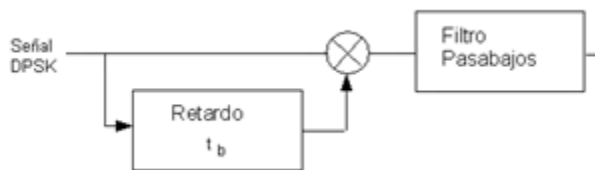
En PRK cuando se tiene un “1” se transmite un trozo de Coseno (COS), cuando se tiene un “0” se transmite un $-\text{Coseno}$ (-COS).

Como la señal PSK solo puede detectarse con un detector coherente y en aplicaciones móviles no es conveniente utilizar este tipo de detector (los teléfonos serían mas caros ya que requerirían sistemas de sincronismo de portadora), se propone el esquema diferencial; en este el "1" se representa por una señal igual a la usada para representar el bit anterior (no hay transición) y el "0" se representa por el negativo de la señal usada para representar el bit anterior (hay transición). Observe la siguiente figura

Para entender como funciona el demodulador a continuación pondremos la secuencia de Cos y $-\text{Cos}$ que corresponden a la secuencia de 1s y 0s que se muestran



Esto permitiría usar como señal de portadora la del bit anterior y el receptor sería tan sencillo como el siguiente:



1	1	0	1	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Cos	Cos	-Cos	-Cos	-Cos	Cos	-Cos
Retardado	Cos	Cos	-Cos	-Cos	-Cos	Cos
Al Multiplicar	$\text{Cos}^2x = 0.5 + \text{Cos}2x$	$-\text{Cos}^2x = -0.5 - \text{Cos}2x$	$\text{Cos}^2x = 0.5 + \text{Cos}2x$	$\text{Cos}^2x = 0.5 + \text{Cos}2x$	$-\text{Cos}^2x = -0.5 - \text{Cos}2x$	$-\text{Cos}^2x = -0.5 - \text{Cos}2x$
Luego del LPF	1	0	1	1	0	0

Uno de los sistemas que se emplea para Telefonía celular es DQPSK que es una versión diferencial de QPSK que es un sistema de modulación de fase pero cuaternario, es decir, de 4 fases.