

# Tema II: Transformación de Coordenadas

*Prof. José Manuel Aller*  
Dpto. de Conversión y Transporte de Energía  
**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**  
**CT-6311**

Sartenejas, 24 de Septiembre de 2005

## 1. Introducción

La modelación directa a partir de leyes físicas, el principio de los trabajos virtuales<sup>1</sup> o el método variacional pueden determinar los modelos de los convertidores electromecánicos de energía en un sistema de coordenadas originarias o primitivas. La ventaja de este sistema de coordenada se fundamenta en la coincidencia física entre las variables del modelo y los valores medibles en la máquina. Por otra parte, estos modelos dependen explícitamente de la posición angular y poseen fuertes acoplamientos entre sus bobinas que dificultan la solución analítica y numérica del sistema de ecuaciones diferenciales.

La necesidad de obtener soluciones que tengan utilidad práctica para el análisis, evaluación o diseño de los convertidores electromecánicos obliga a buscar transformaciones modales<sup>2</sup> que permitan desacoplar las variables de estado y conviertan la dependencia angular en una dependencia en velocidad angular<sup>3</sup>.

## 2. Modelos en coordenadas primitivas

En la figura 1 se presenta el esquema básico de las bobinas de una máquina de inducción cuyo rotor y estator son trifásicos. En general el modelo se puede establecer para un número general de fases en el estator y otro en el rotor. Como la mayoría de los motores de inducción de uso industrial son trifásicos en el estator, se realizará el modelo para un caso particular donde el rotor y el estator son trifásicos<sup>4</sup>. Normalmente las bobinas rotóricas se encuentran en cortocircuito y en el estator se aplica un sistema trifásico y balanceado de tensiones sinusoidales. En los modelos convencionales de la máquina de inducción se desprecian los efectos que produce el ranurado, la distribución de los devanados, las excentricidades estáticas y dinámicas y en ciertos casos las pérdidas en el hierro y las pérdidas mecánicas.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas indicado en la figura 1 son:

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + p [\lambda] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + [\mathbf{L}(\theta)] p [\mathbf{i}] + \dot{\theta} [\tau(\theta)] [\mathbf{i}] \quad (1)$$

$$T_e - T_m = \frac{1}{2} [\mathbf{i}]^t [\tau] [\mathbf{i}] - T_m = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>También denominado principio de los desplazamientos virtuales.

<sup>2</sup>Relacionado con los autovalores y autovectores del sistema de ecuaciones diferenciales.

<sup>3</sup>Es necesario recordar que la velocidad angular en régimen permanente es constante mientras que el ángulo depende del tiempo. La velocidad es una variable más "lenta" que la posición.

<sup>4</sup>El caso general puede ser analizado mediante la misma técnica.

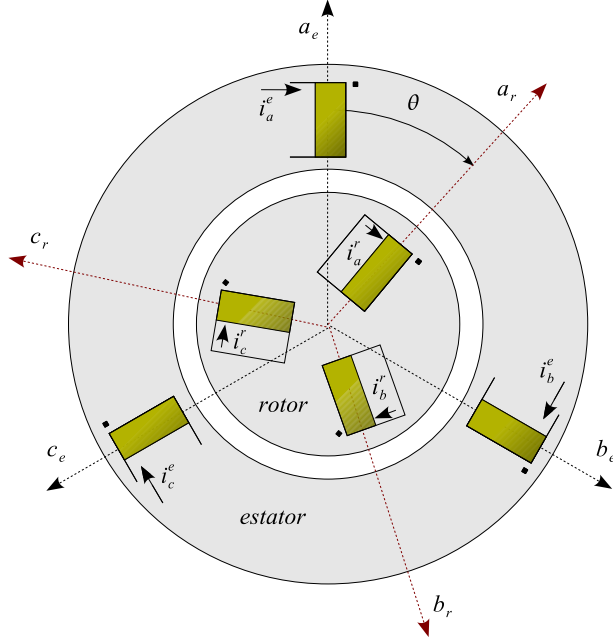


Figura 1: Diagrama esquemático de las bobinas de una máquina de inducción trifásica en el rotor y estator

donde:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{v}] &\equiv \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_e] \\ [\mathbf{v}_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [v_a^e & v_b^e & v_c^e]^t \\ [v_a^r & v_b^r & v_c^r]^t \end{bmatrix}; [\mathbf{i}] \equiv \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [i_a^e & i_b^e & i_c^e]^t \\ [i_a^r & i_b^r & i_c^r]^t \end{bmatrix}; \\
 [\lambda] &\equiv \begin{bmatrix} [\lambda_e] \\ [\lambda_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [\lambda_a^e & \lambda_b^e & \lambda_c^e]^t \\ [\lambda_a^r & \lambda_b^r & \lambda_c^r]^t \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{ee}] & [\mathbf{R}_{er}] \\ [\mathbf{R}_{re}] & [\mathbf{R}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & R_r [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{L}(\theta)] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_{ee}] & [\mathbf{L}_{er}(\theta)] \\ [\mathbf{L}_{re}(\theta)] & [\mathbf{L}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma e} [\mathbf{I}] + L_{me} [\mathbf{S}] & L_{er} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} [\mathbf{C}(\theta)]^t & L_{\sigma r} [\mathbf{I}] + L_{mr} [\mathbf{S}] \end{bmatrix} \\
 [\tau(\theta)] &= \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{ee}] & \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{er}(\theta)] \\ \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{re}(\theta)] & \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)]^t & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{I}] &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [\mathbf{S}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; [\mathbf{0}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{C}(\theta)] &\equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin \theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin \theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Los parámetros que definen el comportamiento del modelo de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas primitivas son:

|                |  |
|----------------|--|
| $R_e$          | es la resistencia de cada una de las bobinas del estator |
| $R_r$          | es la resistencia de cada una de las bobinas del rotor   |
| $L_{\sigma e}$ | es la inductancia de dispersión del estator              |
| $L_{\sigma r}$ | es la inductancia de dispersión del rotor                |
| $L_{me}$       | es la inductancia de magnetización del estator           |
| $L_{mr}$       | es la inductancia de magnetización del rotor             |
| $L_{er}$       | es la inductancia mutua de acoplamiento estator-rotor    |

La matriz  $[\mathbf{S}]$ , representa los acoplamientos *simétricos* entre bobinas del estator o rotor, los términos 1 en la diagonal corresponden a las magnetizaciones de la bobina propia<sup>5</sup> y el término  $-\frac{1}{2}$  representa las mutuas entre fases que se encuentran separadas espacialmente  $\frac{2\pi}{3}$  o  $\frac{4\pi}{3}$ <sup>6</sup>, cuyo acoplamiento depende entonces del  $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ .

La matriz  $[\mathbf{C}(\theta)]$  determina el comportamiento *cíclico* de los acoplamientos mutuos entre bobinas del rotor y del estator, por esta razón aparece el ángulo  $\theta$  como argumento de la función coseno. El acoplamiento entre la fase  $a_e$  del estator y la fase  $a_r$  del rotor depende directamente del  $\cos \theta$ , el acoplamiento entre la fase  $a_e$  del estator y la  $b_r$  del rotor, además de estar separada en el ángulo  $\theta$  entre las referencias de ambos sistemas, tiene una fase adicional de  $\frac{2\pi}{3}$  que corresponde a la separación espacial entre fases, y explica de esta forma la aparición del término  $\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$ . De igual forma se puede explicar el término  $\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$ , correspondiente al acoplamiento entre la fase  $a_e$  del estator y la  $c_r$  del rotor.

El sistema conformado por las seis ecuaciones de tensión planteadas en 1 y el balance de par expresado en la ecuación 2, representan el comportamiento dinámico de la máquina de inducción<sup>7</sup>, pero la dependencia de la posición angular  $\theta$  complica notablemente la solución práctica de este modelo y la técnica de transformación de coordenadas es conveniente.

### 3. Transformaciones modales

En el modelo de la máquina desarrollado en la sección anterior las submatrices de inductancias propias y mutuas del estator  $[L_{ee}]$  o del rotor  $[L_{rr}]$ , son completamente simétricas e independientes de la posición angular  $\theta$ . Las submatrices de inductancias mutuas entre las bobinas del estator y del rotor  $[L_{er}]$ , y  $[L_{re}]$ , son cíclicas, y fuertemente dependientes de la posición angular del rotor  $\theta$ . Analizando los autovalores y autovectores de las matrices completamente simétricas  $[S]$  y de las matrices con simetría cíclicas  $[C]$ , se pueden encontrar transformaciones de coordenadas que simplifiquen la estructura de la matriz de inductancias, y por tanto del sistema de ecuaciones diferenciales.

Una matriz completamente simétrica se caracteriza por tener todos los elementos de la diagonal principal iguales entre sí  $a$ , y los elementos fuera de la diagonal principal también son iguales entre sí  $b$ , pero entre ellos no necesariamente son iguales  $a \neq b$ :

$$[S] = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz completamente simétrica  $[S]$ , son:

$$\det([S] - \gamma [I]) = \det \begin{bmatrix} a - \gamma & b & b \\ b & a - \gamma & b \\ b & b & a - \gamma \end{bmatrix} = (a - \gamma)^3 + 2b^3 - 3b^2(a - \gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma_0 = a + 2b \tag{3}$$

<sup>5</sup>Las fases  $a$  con  $a$ ,  $b$  con  $b$  y  $c$  con  $c$  del sistema rotórico o estatórico respectivamente.

<sup>6</sup>Lo cual incluye los acoplamientos mutuos entre  $a$  y  $b$ ,  $a$  y  $c$ , así como  $b$  con  $c$ .

<sup>7</sup>Dentro del rango de las hipótesis simplificadoras supuestas inicialmente.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = a - b \quad (4)$$

El autovector asociado con el autovalor  $\gamma_0$  es:

$$([S] - \gamma_0 [I]) [V_0] = [0] \Rightarrow \begin{bmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{00} \\ V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [V_0] = V_{00} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Los autovectores asociados con los autovalores  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son:

$$\begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{00} \\ V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [V_{1,2}] = \begin{bmatrix} -V_{1(1,2)} - V_{2(1,2)} \\ V_{1(1,2)} \\ V_{2(1,2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Con los tres autovectores obtenidos en 5 y 6, se construye la matriz de transformación que diagonaliza las matrices completamente simétricas, algunos autores denominan a esta matriz, transformación de Karrenbauer:

$$[T_K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 - k_3 & -k_4 - k_5 \\ k_1 & k_2 & k_4 \\ k_1 & k_3 & k_5 \end{bmatrix} \quad (7)$$

El determinante de la transformación 7 debe ser diferente de cero para que exista la matriz inversa. Si los coeficientes indeterminados de la transformación pueden ser números complejos, la transformación tiene diez grados de libertad. Para garantizar que la matriz de transformación se pueda invertir, requisito indispensable si es necesaria la transformación inversa, es necesario satisfacer simultáneamente las dos condiciones siguientes:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 - k_3 & -k_4 - k_5 \\ k_1 & k_2 & k_4 \\ k_1 & k_3 & k_5 \end{bmatrix} = 3k_1(k_2k_5 - k_3k_4) = 0 \Rightarrow k_1 \neq 0 \wedge k_2k_5 - k_3k_4 \neq 0 \quad (8)$$

Estas dos restricciones, no reducen los grados de libertad, pero restringen los posibles coeficientes al lugar geométrico del hiperespacio dimensional que satisface simultáneamente las dos desigualdades. Una restricción que es de gran utilidad cuando se transforman las variables de los convertidores electromecánicos de energía, pero cuya aplicación no es indispensable, ni necesaria, consiste en imponer la condición de *hermitianidad* sobre la transformación. Cuando se utilizan transformaciones hermitianas, las potencias se conservan entre el sistema de coordenadas primitivas y el sistema de coordenadas transformadas. Una matriz es hermitiana si su inversa es igual a su traspuesta conjugada. Para la transformación de Karrenbauer, la hermitianidad se asegura al cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 - k_3 & -k_4 - k_5 \\ k_1 & k_2 & k_4 \\ k_1 & k_3 & k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^* & -k_2^* - k_3^* & -k_4^* - k_5^* \\ k_1^* & k_2^* & k_4^* \\ k_1^* & k_3^* & k_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_1k_1^* = \frac{1}{3} ; k_2k_2^* + k_4k_4^* = \frac{2}{3} ; k_3k_3^* + k_5k_5^* = \frac{2}{3} ; k_2k_3^* + k_4k_5^* = -\frac{1}{3} \quad (9)$$

Las igualdades obtenidas en el desarrollo 9, restringen en cuatro los grados de libertad cuando se impone la condición hermitiana a la transformación de coordenadas. Si además se exige que la transformación debe utilizar solamente coeficientes reales, es suficiente con definir sólo uno de estos coeficientes para obtener la transformación deseada, con la excepción del primer coeficiente  $k_1$ , que ya está determinado por la selección de transformaciones hermitianas. Cuando se escoge arbitrariamente que la suma de los coeficientes  $k_4$  y  $k_5$  es cero, y que el resto de los coeficientes deben ser reales, se obtiene la conocida transformación de Clark:

$$[T_C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

La transformación de Clark 10, se utiliza con gran frecuencia para transformar los sistemas trifásicos equilibrados en sistemas bifásicos ortogonales equivalentes. Como la transformación está desarrollada mediante coeficientes reales puros, se puede realizar físicamente mediante transformadores ideales. Por esta razón, se ha utilizado en los analizadores de redes analógicos para obtener la respuesta modal de los sistemas eléctricos de potencia, o para analizar los desequilibrios de una red en componentes de secuencia  $\alpha\beta 0$ . Algunos autores obtienen esta transformación a partir de la proyección a ejes ortogonales de los flujos producidos en las tres bobinas de una máquina trifásica equilibrada.

La otra matriz que es necesario analizar para resolver el problema de la diagonalización de la matriz de inductancias  $[L]$ , es la matriz cíclica  $[C]$ . Esta matriz está conformada por tres elementos diferentes  $a, b$  y  $c$ , que se encuentran permutados en cada nueva fila, mediante la rotación de sus elemento con un avance hacia la derecha:

$$[C] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \quad (11)$$

Los autovalores correspondientes a la matriz cíclica  $[C]$ , son:

$$\det([C] - \gamma [I]) = \det \begin{bmatrix} a - \gamma & b & c \\ c & a - \gamma & b \\ b & c & a - \gamma \end{bmatrix} = (a - \gamma)^3 + b^3 + c^3 - 3bc(a - \gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma_0 = a + b + c \quad (12)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2^* = a + be^{j\frac{2\pi}{3}} + ce^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (13)$$

El autovector asociado con el autovalor  $\gamma_0$  es:

$$\begin{bmatrix} -(b+c) & b & b \\ b & -(b+c) & b \\ b & b & -(b+c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{00} \\ V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [V_0] = V_{00} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

El autovector asociado con el autovalor  $\gamma_1$  es:

$$([C] - \gamma_1 [I]) [V_1] = [0] \Rightarrow [V_1] = V_{01} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Y por último, el autovector asociado con el autovalor  $\gamma_2$  es:

$$([C] - \gamma_2 [I]) [V_2] = [0] \Rightarrow [V_2] = V_{02} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Con los tres autovectores obtenidos en 14, 15 y 16, se construye la matriz de transformación que diagonaliza las matrices cíclicas. Esta transformación, introducida inicialmente por Fortescue para el análisis de los sistemas de potencia trifásicos y desequilibrados, se conoce en la literatura como transformación de componentes simétricas:

$$[T_{CS}] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} & k_4 e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ k_1 & k_3 e^{j\frac{4\pi}{3}} & k_5 e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Si los coeficientes de la transformación de componentes simétricas son números complejos, se obtienen seis grados de libertad. Para que la matriz tenga inversa, es necesario que se cumplan las tres condiciones siguientes:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} & k_4 e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ k_1 & k_3 e^{j\frac{4\pi}{3}} & k_5 e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} = 3\sqrt{3}e^{j\frac{3\pi}{2}} k_1 k_2 k_3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$k_1 \neq 0 ; k_2 \neq 0; k_3 \neq 0 \quad (18)$$

Al establecer la condición de hermitianidad sobre la transformación de componentes simétricas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} & k_4 e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ k_1 & k_3 e^{j\frac{4\pi}{3}} & k_5 e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^* & k_1^* & k_1^* \\ k_2^* & k_2^* e^{j\frac{4\pi}{3}} & k_2^* e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ k_3^* & k_3^* e^{j\frac{2\pi}{3}} & k_3^* e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|k_1| = |k_2| = |k_3| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (19)$$

Las igualdades obtenidas en el desarrollo 19, restringen tres de los seis grados de libertad de la transformación hermitiana de componentes simétricas. Si los coeficientes indeterminados se escogen dentro del conjunto de los números reales, la transformación hermitiana de componentes simétricas queda completamente determinada:

$$[T_{CS}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

La transformación de componentes simétricas se utiliza habitualmente en el cálculo de fallas, desequilibrios, y respuestas modales. Esta transformación tiene una enorme ventaja con respecto a la transformación de Karrenbauer, desacopla tanto a las matrices cíclicas  $[C]$ , como a las matrices completamente simétricas  $[S]$ , debido a que estas últimas corresponden al caso particular de las matrices cíclicas, cuando los coeficientes  $b$  y  $c$  son idénticos entre sí. La transformación de componentes simétricas utiliza coeficientes complejos en sus elementos, esto puede considerarse una desventaja relativa. Por otra parte, esto es una dificultad menor en la actualidad debido a las herramientas de cálculo disponibles.

## 4. Vectores espaciales

Un análisis de los acoplamientos observados en el modelo de la máquina de inducción en coordenadas primitiva permite destacar que estos están definidos por matrices simétricas  $[S]$  o cíclicas  $[C(\theta)]$ . Estas matrices pueden ser diagonalizadas utilizando el método de *autovalores* y *autovectores*. Se puede demostrar con esta técnica que la transformación de *componentes simétricas*<sup>8</sup> es capaz de realizar el desacoplamiento de ambas matrices. La transformación de componentes simétricas hermitiana<sup>9</sup> se define como:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (22)$$

Al aplicar la transformación 22 a un sistema cíclico se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow$$

<sup>8</sup>Propuesta por Fortescue y ampliamente utilizada para el análisis de fallas en sistemas desequilibrados.

<sup>9</sup>Conservativa en potencia.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\alpha+c\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\alpha^2+c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

El desacoplamiento de las matrices simétricas se obtiene como caso particular de las matrices cíclicas donde  $b = c$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Esta propiedad característica de transformación de componentes simétricas permite convertir un sistema acoplado en tres sistemas independientes. El sistema de *secuencia cero* solamente se puede excitar cuando la sumatoria instantánea de las tensiones o de las corrientes es diferente de cero<sup>10</sup>. El sistema de *secuencia negativa* y de *secuencia positiva* son similares y uno es el conjugado del otro. Por estos motivos es posible representar el modelo de la máquina utilizando solamente la transformación de secuencia positiva<sup>11</sup> y se denominó transformación a *vectores espaciales*. Para conservar la potencia activa en la transformación se debe definir la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

La transformación a vectores espaciales permite representar un sistema de tensiones, corrientes o flujos trifásicos mediante un vector en el espacio, cuya posición y magnitud dependen del tiempo. En la figura 2 se muestra una representación gráfica con la interpretación geométrica de la transformación a vectores espaciales para un instante de tiempo dado.

Transformando las ecuaciones 1 al dominio de los vectores espaciales se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \left[ \begin{bmatrix} L_e & M_{er}e^{j\theta} \\ M_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_a^e & v_b^e & v_c^e \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{v}_r &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_a^r & v_b^r & v_c^r \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{i}_e &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a^e & i_b^e & i_c^e \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{i}_r &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a^r & i_b^r & i_c^r \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

<sup>10</sup>En los sistemas trifásicos, esto requiere la presencia de un cuarto hilo por donde pueda circular esta componente. En las máquinas eléctricas industriales es poco habitual la conexión del neutro.

<sup>11</sup>Es equivalente utilizar la componente de secuencia negativa. La componente de secuencia cero tiene escasa utilidad en el análisis de las máquinas debido a que no puede producir par. Sin embargo, algunos desequilibrios dependen instante notoriamente de esta componente.

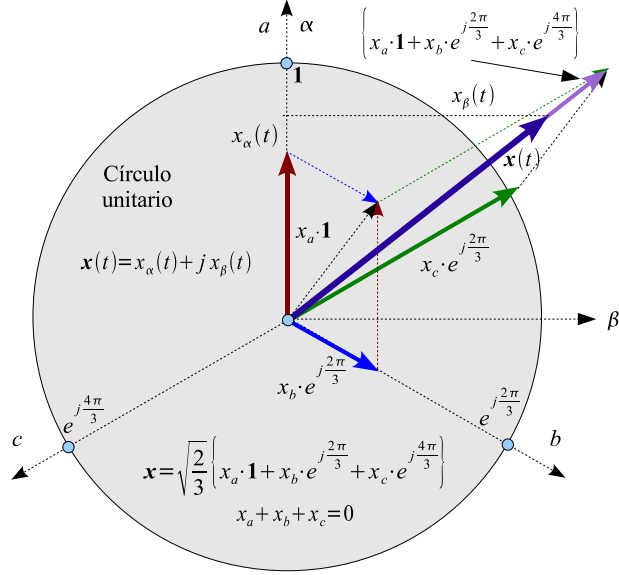


Figura 2: Representación gráfica del vector espacial de un sistema trifásico

$$L_e \equiv L_{\sigma e} + \frac{3}{2}L_{me} ; L_r \equiv L_{\sigma r} + \frac{3}{2}L_{mr} , M_{er} \equiv \frac{3}{2}L_{er}$$

Los términos que aparecen en la expresión 26 se pueden obtener realizando la transformación a vectores especiales de la matrices que representan el modelo de la máquina en coordenadas primitivas, tales como son:

1. La transformación de vectores espaciales aplicada a la *matriz identidad*  $[I]$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned} \quad (27)$$

2. La transformación aplicada a la *matriz simétrica*  $[S]$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_a \\ \frac{3}{2}x_b \\ \frac{3}{2}x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (28)$$

3. La misma transformación aplicada a la *matriz cíclica*  $[C(\theta)]$ , recordando que  $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ :

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{3}} [ 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 ] \left\{ \frac{e^{j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \{ e^{j\theta} [ 3 \quad 3\alpha \quad 3\alpha^2 ] + e^{-j\theta} [ 0 \quad 0 \quad 0 ] \} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} e^{j\theta} \mathbf{x} \quad (29)
\end{aligned}$$

La transformación a vectores espaciales de la expresión del par eléctrico expresado en el balance de la ecuación ?? queda:

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{1}{2} [\mathbf{i}]^t [\tau] [\mathbf{i}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] & L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)]^t & [\mathbf{0}] \end{array} \right]^t \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} = \\
&= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] [\mathbf{i}_r] = \\
&= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{i}_r] = \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e [ 1 \quad \alpha^2 \quad \alpha ] - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^* [ 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 ] \right\} [\mathbf{i}_r] = \\
&= \frac{3}{2} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^* \mathbf{i}_r \right\} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^* e^{-j\theta} \} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r e^{j\theta})^* \} \quad (30)
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas correspondiente a los vector espaciales es:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \left[ \begin{array}{cc} L_e & M_{er} e^{j\theta} \\ M_{er} e^{-j\theta} & L_r \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \\
M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r e^{j\theta})^* \} - T_m(\dot{\theta}) &= J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (31)
\end{aligned}$$

El modelo 31, simplifica notablemente las expresiones 1 y 2, al representar las magnitudes trifásicas mediante vectores espaciales. Por una parte el sistema se ha reducido de las siete ecuaciones diferenciales iniciales a tres<sup>12</sup> y la dependencia en la posición angular  $\theta$  se ha simplificado a su aparición en matrices cuya dimensión es  $2 \times 2$ <sup>13</sup>. Sin embargo, la dependencia en la posición angular  $\theta$  puede ser eliminada, si las variables del rotor se refieren al estator utilizando la siguiente transformación<sup>14</sup>:

$$\mathbf{x}_r^e \equiv \mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} \quad (32)$$

Para aplicar la transformación 32 al modelo de la máquina en vectores espaciales 31, se requiere desarrollar la derivada correspondiente de esta transformación:

$$\begin{aligned}
p\mathbf{x}_r^e &= p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} = p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\mathbf{x}_r^e \Rightarrow \\
p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} &= p\mathbf{x}_r^e - j\dot{\theta}\mathbf{x}_r^e \quad (33)
\end{aligned}$$

<sup>12</sup>Esta apariencia más simple no debe hacer olvidar el hecho de que las nuevas variables son vectores espaciales variables en el tiempo y no simples variables instantáneas como era en el caso del modelo de la máquina de inducción en coordenadas primitivas.

<sup>13</sup>Y que pueden ser invertidas analíticamente con relativa sencillez.

<sup>14</sup>Recordemos que el sistema de referencia del estator es independiente del sistema de referencia del rotor, pero ambas referencias se encuentran separadas en el ángulo  $\theta$ , por esta razón cuando se multiplica un vector espacial en el sistema de referencia rotórico por  $e^{j\theta}$ , el nuevo vector resultante posee la misma magnitud y su fase ahora se mide desde el sistema de referencia estatórico.

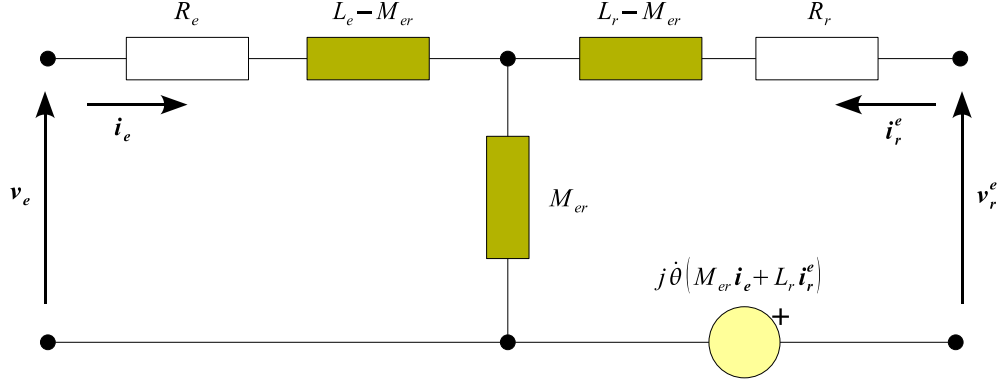


Figura 3: Circuito equivalente de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al sistema de referencia estático

Utilizando las expresiones 32 y 33 en el modelo 31, se obtiene el siguiente modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al estator:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} \\ M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r^e)^* \} - T_m(\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (34)$$

El modelo 34 es independiente de la posición angular  $\theta$  que es variable en el tiempo aun en el caso particular de la operación en régimen permanente y esta dependencia es reemplazada por la velocidad angular  $\dot{\theta}$  cuyo comportamiento temporal varía más lentamente<sup>15</sup>. Este modelo puede ser representado mediante el circuito equivalente que se muestra en la figura 3. Este circuito reproduce el comportamiento eléctrico de la máquina en régimen transitorio y es capaz de calcular el par eléctrico evaluando la potencia activa transferida a la fuente dependiente de corriente del circuito rotórico, tema que será analizado con mayor profundidad en el capítulo 7.

## 5. Transformación de Park

La rotación del vector espacial 32 puede expresarse mediante matrices:

$$\begin{aligned} x_d + jx_q &= \mathbf{x} \cdot e^{j\theta} = (x_\alpha + jx_\beta) \cdot (\cos\theta + j\sin\theta) = \\ x_d &= x_\alpha \cdot \cos\theta + x_\beta \cdot \sin\theta \\ x_q &= -x_\alpha \cdot \sin\theta + x_\beta \cdot \cos\theta \\ \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} x_\alpha + jx_\beta &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} (x_a + \alpha x_b + \alpha^2 x_c) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( x_a - \frac{x_b + x_c}{2} \right) + j \frac{1}{\sqrt{2}} (x_b - x_c) \end{aligned} \quad (36)$$

<sup>15</sup>En efecto, en régimen permanente la velocidad angular es una constante, mientras que el ángulo cambia constantemente.

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

Incluyendo la componente de secuencia cero en la transformación<sup>36</sup>, manteniendo la hermitianidad de la transformación, se obtiene la misma transformación de Clark 10:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (38)$$

Al enlazar la transformación hermitiana de Clark 38 con la rotación a ejes  $d-q$  expresada en 35, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_d \\ x_q \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_d \\ x_q \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (40)$$

## 6. Máquina de inducción en coordenadas dq

Un nivel de simplificación y desacoplamiento mayor se obtiene en el modelo al proyectar los diversos fasores espaciales con respecto a una referencia determinada. Estas proyecciones son equivalentes a realizar una rotación de los vectores espaciales a las coordenadas  $dq$  analizada en el capítulo 4. En la transformación clásica a coordenadas  $dq$  el ángulo de rotación se define entre la referencia del estator<sup>16</sup> y la posición del rotor. En general, se pueden seleccionar infinitas referencias de rotación completamente arbitrarias tales como la posición del fasor espacial de la corriente del estator, la corriente del rotor o la corriente de magnetización y la selección de cualquiera de estos patrones depende del análisis o la aplicación que se está realizando:

1. El vector espacial de la *corriente del estator* puede ser medido directamente.
2. El vector espacial de la *corriente de magnetización* está asociado directamente con el flujo resultante en el entrehierro y con la producción del par eléctrico.
3. El vector espacial de la *corriente del rotor* tiene incidencia sobre el rendimiento de la máquina y la transferencia de potencia al eje mecánico.
4. *Posición arbitraria*  $\delta$ , permite acelerar la integración numérica de las variables de estado del modelo cuando se sintoniza esta referencia con las fluctuaciones de las fuentes o de la velocidad de rotación.

<sup>16</sup>Generalmente el eje magnético de la fase  $a$ .

5. El vector espacial de la *corriente de magnetización modificada* puede desacoplar las derivadas de los vectores espaciales de las corrientes del estator y rotor proporcionando un modelo de la máquina de inducción donde se puede independizar la generación del flujo y la producción del par<sup>17</sup>. Es una de las referencias más utilizada en la literatura y se conoce como *modelo de campo orientado*.

La corriente de magnetización modificada que determina la referencia del modelo de campo orientado se define como:

$$\mathbf{i}_m \equiv \mathbf{i}_e + \frac{L_r}{M_{er}} \mathbf{i}_r^e = i_m(t) \cdot e^{j\delta(t)} \quad (41)$$

El término  $\frac{L_r}{M_{er}}$  refiere al sistema de referencia del estator todo el campo magnético producido por las corrientes del rotor que atraviesa el entrehierro de la máquina. En la figura ?? se presenta un diagrama de los vectores espaciales correspondientes a las corrientes de la máquina. El vector espacial de la corriente del estator se puede representar mediante dos componentes ortogonales, una paralela al fasor espacial de la corriente de magnetización  $\mathbf{i}_m$  y la otra en cuadratura, denominadas  $i_{de}$  e  $i_{qe}$  respectivamente. De acuerdo con la figura ?? se tiene:

$$i_{de}(t) + ji_{qe}(t) = \mathbf{i}_e e^{-j\delta(t)} = (i_{\alpha e} + ji_{\beta e}) \cdot (\cos \delta - j \sin \delta) \Rightarrow \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} i_{de} \\ i_{qe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{de} \\ i_{qe} \end{bmatrix} \quad (44)$$

donde:

$$\mathbf{i}_e = i_{\alpha e} + ji_{\beta e} = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_{ae} + e^{j\frac{2\pi}{3}}i_{be} + e^{j\frac{4\pi}{3}}i_{ce}) \Rightarrow \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{be} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$i_{ae} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re e(\mathbf{i}_e) ; i_{be} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re e(\mathbf{i}_e e^{-j\frac{2\pi}{3}}) ; i_{ce} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re e(\mathbf{i}_e e^{-j\frac{4\pi}{3}}) \quad (48)$$

Reemplazando la corriente  $\mathbf{i}_r^e$  de la definición 41 de la corriente de magnetización modificada  $\mathbf{i}_m$  en el modelo de la máquina de inducción en coordenadas vectoriales referidas a las corrientes del estator 49, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r}(\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r}(\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} + \\ &= \dots - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r}(\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>17</sup>La difusión de este modelo se debe a la posibilidad de utilizar los esquemas de control de las máquinas de corriente continua para regular la velocidad de las máquinas de inducción.

$$M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e \left( \frac{M_{er}}{L_r} (\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \right)^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (49)$$

Reagrupando las variables de estado del sistema 49 se obtiene el modelo de la máquina de inducción expresado en coordenadas de campo orientado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \frac{1}{M_{er}} \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ -\frac{1}{T_r} & \frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r} & \frac{M_{er}^2}{L_r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} \\ \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot \mathbf{i}_m^* \} - T_m(\dot{\theta}) &= J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (50)$$

donde:

$$T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (51)$$

En el modelo de la máquina en coordenadas de campo orientado la expresión del par eléctrico se puede simplificar cuando se incluye la definición de la corriente de magnetización 41 y la transformación de la corriente del estator a coordenadas  $dq$  42:

$$T_e = \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot \mathbf{i}_m^* \} = \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot i_m e^{-j\delta} \} = \frac{M_{er}^2}{L_r} i_m \cdot i_{qe} \quad (52)$$

La ecuación de la tensión del rotor referida al sistema de referencia del estator en el modelo de campo orientado es independiente de la derivada de las corrientes del estator. Por otra parte, es frecuente que la tensión del rotor es cero  $\mathbf{v}_r^e = 0$ . Multiplicando por  $e^{-j\delta}$  la ecuación de tensión del rotor y separando esta expresión en parte real e imaginaria se obtienen las dos ecuaciones diferenciales escalares siguientes:

$$T_r p i_m + i_m = i_{de} \quad (53)$$

$$T_r i_m (\dot{\delta} - \dot{\theta}) = i_{qe} \quad (54)$$

Las expresiones 52, 53 y 54 tienen un paralelismo con el modelo dinámico de la máquina de corriente continua. La ecuación 53 determina el comportamiento del campo<sup>18</sup> de la máquina de inducción y se puede controlar ajustando la componente directa de la corriente del estator  $i_{de}$ . La componente cuadratura  $i_{qe}$  por otra parte determina mediante la expresión 54 el deslizamiento  $(\dot{\delta} - \dot{\theta})$  existente entre la velocidad angular del campo y la velocidad angular del rotor<sup>19</sup>. El par eléctrico 52 queda determinado por el producto de la magnitud de la corriente de campo  $i_m$  y la componente cuadratura de la corriente del estator<sup>20</sup>. Una de las ventajas más importantes de este modelo reside en la posibilidad de regular el par y la velocidad de la máquina mediante el control de las corrientes del estator. Utilizando fuentes de corriente controladas, es posible el accionamiento a velocidad variable de la máquina sin utilizar la ecuación de las tensiones del estator.

El modelo escalar completo en coordenadas de campo orientado es:

<sup>18</sup>Esta ecuación es similar a la ecuación del campo de una máquina de corriente continua  $L_f p i_f + R_f i_f = v_f$ .

<sup>19</sup>Esta ecuación es comparable directamente con el modelo de la armadura de la máquina de corriente continua  $V_a - G\omega_m i_f = R_a i_a$ .

<sup>20</sup>En la máquina de corriente continua el par queda determinado por el producto de la corriente de campo y la corriente de armadura  $T_e = G i_f i_a$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} p i_{de} = (L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r})^{-1} \left\{ v_{de} - (R_e + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2}) i_{de} \right\} + \omega_m i_{qe} + \frac{i_{qe}^2}{T_r i_m} + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2} i_m \\ p i_{qe} = -\omega_m i_{de} - \frac{i_{de} i_{qe}}{T_r i_m} - (L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r})^{-1} \left\{ (R_e + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2}) i_{qe} - \frac{M_{er}^2}{L_r} \omega_m i_m + v_{qe} \right\} \\ p i_m = \frac{i_{de} i_m}{T_r} \\ p \delta = \omega_m + \frac{i_{qe}}{T_r i_m} \\ p \omega_m = \frac{1}{J} \left\{ \frac{M_{er}^2}{L_r} i_m \cdot i_{qe} - T_m(\omega_m) \right\} \end{array} \right. \quad (55)$$

El modelo de campo orientado 55, requiere que la corriente de magnetización sea diferente de cero  $i_m \neq 0$ . Si este requisito no se cumple, se pierde la referencia  $\delta$ , debido a que  $p\delta \rightarrow \infty$ . En algunos casos es posible asumir que en las condiciones iniciales la corriente  $i_m$  tiene un valor de remanencia que permita iniciar la integración numérica, pero aun así si durante el proceso en algún intento de tiempo esta corriente se anula, el sistema de ecuaciones diferenciales pierde la referencia y debe encontrarse algún modelo alternativo que permita continuar la integración. El sistema de coordenadas referidas a una posición angular arbitraria  $\delta$  permite resolver este problema y plantea una generalización del modelo que permite en muchos casos acelerar el cálculo de las variables de estado.

En el modelo de referencia arbitraria se refieren todos los vectores espaciales del sistema 56 a una posición angular  $\delta$ , que gira a la velocidad  $\dot{\delta}$ . Para esto, se multiplican todos los vectores espaciales por  $e^{-j\delta}$  obteniéndose el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e^\delta \\ \mathbf{v}_r^\delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \dot{\delta} L_e & \dot{\delta} M_{er} \\ (\dot{\delta} - \dot{\theta}) M_{er} & (\dot{\delta} - \dot{\theta}) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} \\ M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e^\delta (\mathbf{i}_r^\delta)^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) &= J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (56)$$

El par eléctrico calculado a partir de la integración de las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de la máquina, presenta fuertes oscilaciones durante el arranque, debido a que la fuente debe incrementar el flujo en el entrehierro para producir par. Estas oscilaciones son semejantes al fenómeno de energización de un transformador. La velocidad también es afectada por las fuertes perturbaciones del par eléctrico, pero en menor medida debido al retardo que introduce la inercia.

## Referencias

- [1] B. Adkins; *"The General Theory of Electric Machines,"* Chapman and Hall, London 1957.
- [2] B. Adkins; R. G. Harley; *"The General Theory of Alternating Current Machines,"* Chapman and Hall, London 1975.
- [3] J. M. Aller; *"Simple Matrix Method to Introduce Spatial Vector Transformations and Oriented Field Equations in Electric Machine Courses,"* ICEM96 Proceedings, Vol. III, pp. 519-524, September, 1996. Vigo, Spain.
- [4] E. Clarke; *"Circuit Analysis of A-C Power Systems. Volume I & II: Symmetrical and Related Components,"* General Electric Company, Seventh printing, 1961.
- [5] C. Concordia; *"Synchronous Machines: Theory and Performance,"* General Electric Company, 1951.
- [6] C. L. Fortescue; *"Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks,"* AIEE Transactions, Vol. 37, 1918, pp. 1027-1140.
- [7] R. Gabriel; W. Leonhard; C. J. Nordby; *"Field-Oriented Control of a Standard Motor Using Microprocessors,"* IEEE Transactions on Industrial Applications, Vol. IA-16, pp. 186-192, Mar./Apr. 1980.

- [8] H. Karrenbauer; *"Propagation of travelling waves on overhead lines for variation tower configuration and its effects on the shape of recovery voltage for short line faults,"*. Doctoral Dissertation, Muniich, 1967.
- [9] G. Kron; *"The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery,"* General Electric Review, Schenectady, New York 1942.
- [10] W. Leonhard; *"Control of Electrical Drives,"*. Springer - Verlag - Berlin, Heideberg 1985.
- [11] R. H. Park; *"Two Reaction Theory of Synchronous Machines, Pt. 1,"* AIEE Transactions, Vol. 48, pp. 716-730, 1929.
- [12] R. H. Park; *"Two Reaction Theory of Synchronous Machines, Pt. 2,"* AIEE Transactions, Vol. 52, pp. 352-355, 1933.
- [13] P. Vas; *"Electrical Machines and Drives. A Space Vector Approach,"*; Oxford University Press, 1992.
- [14] D. C. White; H. H. Woodson; *"Electromechanical Energy Conversion,"* John Wiley & Sons, New York 1959.
- [15] S. Yamamura; *"Spiral Vector Method and Symmetrical Component Method,"*. Procc. Japan Academy, Vol. 67B, pp. 1-6, 1994.