

Tema I:
Modelación de Convertidores Electromecánicos

Prof. José Manuel Aller
Dpto. de Conversión y Transporte de Energía
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
CT-6311

Sartenejas, 18 de Septiembre de 2005

1. Introducción

Modelar un sistema físico consiste en representar la realidad con cierto grado de aproximación. Se entiende por realidad el comportamiento de las iteraciones observables o medibles existentes en la naturaleza. Para representar la realidad es necesario un lenguaje preciso, las matemáticas por tanto son la principal herramienta. Las regularidades que se encuentran en el universo permiten la formulación de leyes generales que constituyen lo que hoy en día se denomina conocimiento físico. Las leyes físicas que rigen el comportamiento del universo son las herramientas fundamentales de la modelación cuando se expresan en un lenguaje tan preciso como es el de las matemáticas.

Aun cuando el sentido común hace pensar en la existencia de un número muy elevado de fuerzas o iteraciones de la materia, en la actualidad el conocimiento científico ha concretado las diferentes teorías al extremo de contemplar la existencia de tan sólo cuatro tipos diferentes de iteraciones. Incluso algunos científicos intentan demostrar que este número de fuerzas es menor. Las cuatro fuerzas estudiadas por la Física en la actualidad son: La *gravitación*, el *electromagnetismo*, las iteraciones *nucleares fuertes* y las iteraciones *nucleares débiles*. Estas fuerzas tienen un ámbito de aplicación y alcance diferente. La gravitación es la fuerza más débil existente entre las partículas materiales, pero sus efectos alcanzan distancias siderales. La electricidad y el magnetismo producen densidades de fuerza entre las cargas muy superiores a las originadas por la gravedad entre las masas, pero su efecto es importante a distancias atómicas y moleculares. Las iteraciones nucleares fuertes que mantienen cohesionados los núcleos atómicos y las iteraciones nucleares débiles entre diferentes partículas elementales, tienen radios de acción subatómicos pero sus densidades de fuerza son enormes.

El hombre es capaz de observar y medir las cuatro fuerzas fundamentales. La gravitación mantiene en movimiento el Universo, y puede ser observada y estudiada durante la caída de cualquier objeto. La electricidad se presenta de muy variadas formas, prácticamente la estructura y las propiedades físicas o químicas de todos los materiales existentes dependen

directamente de esta fuerza. Las fuerzas nucleares son patentes durante las reacciones estelares y en los procesos de fisión y fusión atómica. Algunos físicos teóricos han planteado como hipótesis la existencia de una sola fuerza con diferentes comportamientos y alcances según la distancia entre las partículas que se encuentran interactuando.

Las fuerzas de la naturaleza se encuentran distribuidas no uniformemente en el espacio, por esta razón resulta de gran utilidad recurrir al concepto de campo de fuerzas. El campo representa la distribución de la fuerza que se ejerce sobre una partícula de prueba elemental en un punto cualquiera del espacio. La descripción matemática de los campos permite la evaluación de las fuerzas puntuales sobre las partículas elementales.

Newton en el siglo XVII y Einstein en los comienzos del siglo XX describieron el comportamiento del campo gravitatorio con diferentes grados de aproximación. Maxwell en el siglo XIX, en una síntesis tan importante como las anteriores, expresó matemáticamente el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Desde el descubrimiento de la naturaleza del átomo hasta nuestros días, se ha venido desarrollando una intensa actividad que persigue la interpretación física y la descripción matemática de las interacciones nucleares.

Cuando el comportamiento físico de las interacciones es lineal, el principio de superposición permite una identificación matemática de los fenómenos macroscópicos. La presencia de no linealidades, o de distribuciones complejas de los campos y sus fronteras, pueden dificultar o impedir la aplicación del principio de superposición en la modelación de los sistemas reales.

Con la finalidad de representar el comportamiento de los sistemas complejos con una descripción matemática más simple, se han desarrollado conceptos tan importantes como energía y trabajo. Estos conceptos permiten contabilizar globalmente las interacciones, sin considerar los fenómenos puntuales o particulares. Un procedimiento similar utiliza el contador de una ferretería para evaluar el estado financiero del negocio, este profesional no necesita conocer el valor de compra y venta de cada tornillo o herramienta para determinar el beneficio global de la empresa, le basta con sumar haberes y restar deberes, el resultado final es la utilidad. El principio de los trabajos virtuales, denominado por algunos autores con cierta propiedad, principio de los desplazamientos virtuales, es una herramienta que permite determinar con simplicidad y elegancia las fuerzas que aparecen en sistemas físicos de gran complejidad a partir del concepto de energía y de la solución estática del campo.

El concepto de energía es de gran importancia en el desarrollo de modelos de los sistemas físicos. Sin embargo es necesario recordar que este concepto es completamente arbitrario, y como tal no debe limitar el desarrollo de ideas diferentes o alternativas que cumplan en algunos casos, con el mismo propósito pero con mejores resultados o representaciones más simples. Esta idea apunta en la dirección que permite representar a los sistemas físicos de gran complejidad mediante funciones de estado, utilizando el cálculo variacional como herramienta fundamental en la determinación del modelo. Según esta concepción, la energía es una más de las infinitas funciones de estado posibles.

Cuando se desea obtener la descripción matemática de un sistema físico se dispone principalmente de tres herramientas básicas:

1. La solución directa del campo de fuerzas con la superposición o integración de los fenómenos a niveles macroscópicos.

2. El principio de los trabajos virtuales con la solución de los campos en régimen estacionario.
3. El cálculo variacional con las funciones de estado.

Cada uno de estos métodos puede modelar matemáticamente el sistema con diferentes grados de dificultad, complejidad y precisión. Los métodos variacionales alcanzan el nivel más alto de abstracción, y por esta razón tienden a diluir la interpretación física de los fenómenos. Sin embargo, determinan el modelo matemático del sistema físico con la mayor generalidad posible. Los conceptos de energía y trabajo, aun cuando encierran ciertos prejuicios y malas interpretaciones, han calado profundamente en la semántica y sentimiento popular, pueden parecer más concretos pero son mucho menos generales que los métodos variacionales. La modelación de los sistemas físicos a partir de la descripción de los campos es una solución cuya complejidad depende de cada caso en particular. Sin embargo, en algunas ocasiones la simplicidad del sistema permite que su aplicación resulte práctica y la interpretación física de los resultados es mucho más directa.

2. Alcance de los modelos

Los convertidores electromecánicos de energía son dispositivos que permiten interconectar sistemas eléctricos, magnéticos y mecánicos. Son fundamentales en diversas aplicaciones de la vida moderna. Desde los grandes generadores sincrónicos que convierten la energía térmica o hidráulica en enormes volúmenes de potencia y energía eléctrica, hasta el pequeño ventilador que refrigera los circuitos del computador con que se escribió este trabajo, satisfacen las mismas leyes físicas y principios básicos.

Las razones existentes para modelar un convertidor electromecánico de energía pueden variar, y los modelos matemáticos deben tener una estrecha conexión con estas necesidades. Los modelos utilizados por un diseñador de equipos electromecánicos, un analista de sistemas o el operador de una planta industrial pueden ser muy diferentes, porque los problemas que enfrentan estos profesionales también lo son. En cualquier caso, el modelo matemático debe procurar ser, en la medida de lo posible, simple pero al mismo tiempo debe garantizar la precisión exigida por la aplicación concreta. Un diseñador puede estar preocupado por el incremento de pérdidas originadas en una bobina cuando se cambia el tipo de material ferromagnético. Un analista de sistemas o un planificador puede necesitar el rango de regulación de potencia de un equipo en una determinada condición de operación. El operador de un convertidor puede necesitar evaluar su comportamiento durante una falla o en la operación desequilibrada. Determinados modelos pueden ser dinámicos, otros multifrecuenciales estáticos, algunos deberán representar aspectos físico-geométricos concretos del convertidor. Mientras que la mayoría de los modelos determinan comportamientos cuantitativos del sistema, en algunos casos sólo es necesaria una interpretación cualitativa del fenómeno. En conclusión, es necesario alcanzar un compromiso entre la sencillez del modelo y la precisión requerida por la aplicación respectiva.

En pocas palabras, modelos muy precisos no siempre pueden resolver el problema, en ocasiones otras características tales como sencillez o desacoplamiento de las variables pueden

ser más relevantes. Por este motivo es conveniente disponer de un abanico de posibilidades, y adecuar el modelo a cada problema concreto.

3. Modelos circuitales generalizados

En un convertidor electromecánico de energía existen iteraciones entre los sistemas mecánicos y electromagnéticos. Los convertidores electromecánicos más utilizados operan generalmente a velocidades mecánicas y a frecuencias eléctricas relativamente reducidas, por esta razón es posible emplear métodos circuitales para la representación físico-matemática en la mayoría de las aplicaciones reales. Cuando los sistemas operan con altas frecuencias o velocidades cercanas a la velocidad de la luz, los modelos circuitales en parámetros concentrados no reproducen bien el comportamiento físico.

Los modelos circuitales se componen de nodos y lazos, asociados con los subsistemas electromagnéticos y mecánicos. La descripción de cada subsistema requiere el uso de dos variables de diferente naturaleza, flujo y esfuerzo. Las variables de flujo circulan por los lazos del modelo. Los diferentes flujos que se encuentran en un nodo del circuito equivalente suman siempre cero. El esfuerzo es una variable que siempre está definida entre dos puntos del sistema o entre un punto y una referencia arbitraria. La suma de los esfuerzos en un lazo siempre es cero. El conjunto de las dos variables asociadas, un flujo y un esfuerzo determinan un puerto del convertidor. El producto de la variable de flujo por la variable de esfuerzo introduce el concepto de potencia. Cada punto del sistema por el que puede entrar o salir potencia se denomina un puerto del convertidor. Según estas ideas es posible establecer un conjunto de relaciones para la descripción circuital de un convertidor: dos por cada puerto mecánico y dos para cada uno de los puertos electromagnéticos.

El comportamiento de los puertos mecánicos del convertidor está determinado por dos principios o leyes fundamentales. En primer lugar se establece el principio de d’Alambert que define el comportamiento dinámico de cada uno de los nodos mecánicos del convertidor. Según este principio, la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas e inerciales sobre un nodo mecánico es igual a cero. Esto se conoce como la condición de equilibrio dinámico del sistema mecánico. Para el nodo genérico k , el principio d’Alambert se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^r (\dot{\mathbf{p}}_{k_i} - \mathbf{f}_{k_i}) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{d}{dt} (m_{k_i} \dot{\mathbf{x}}_{k_i}) - \mathbf{f}_{k_i} \right) = 0 \quad (1)$$

donde:

$$\begin{array}{ll} \dot{\mathbf{p}}_{k_i} & \text{i-ésima fuerza inercial del nodo k.} \\ \mathbf{f}_{k_i} & \text{i-ésima fuerza aplicada en el nodo k.} \end{array}$$

La fuerza inercial $\dot{\mathbf{p}}_{k_i}$ se obtiene derivando el momentum mecánico. La variable fuerza tiene las propiedades de un flujo, circula a través de un circuito cerrado. El sistema mecánico debe cumplir también con las relaciones de continuidad del espacio. Al recorrer el camino

mecánicos cerrado j , la suma de todos los desplazamientos o velocidades debe ser cero:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\mathbf{x}}_{j_i} = 0 \quad (2)$$

donde:

$\dot{\mathbf{x}}_{j_i}$ es la i -ésima velocidad del recorrido mecánico cerrado j .

En el sistema electromagnético se pueden establecer de igual forma, utilizando las dos relaciones fundamentales de equilibrio enunciadas por Kirchhoff en sus famosas leyes, una que define la continuidad de la carga o de la corriente en un nodo:

$$\sum_{i=1}^r i_{k_i} = 0 \quad (3)$$

donde:

i_{k_i} es la i -ésima corriente del nodo eléctrico k .

y la otra que postula el equilibrio de fuerzas electromotrices en un lazo:

$$\sum_{i=1}^s e_{j_i} = 0 \quad (4)$$

donde:

e_{j_i} es la i -ésima caída de tensión del lazo eléctrico j .

Para completar la descripción matemática del modelo es necesario expresar las fuerzas mecánicas y las fuerzas electromotrices de origen electromagnético en función de las corrientes o de las cargas, y de los desplazamientos o velocidades mecánicas. Las relaciones o leyes expresadas en las ecuaciones 1 a 4, relacionan el comportamiento eléctrico y mecánico intrínseco del convertidor con los sistemas externos. Este conjunto de ecuaciones determina un circuito equivalente del convertidor, el cual puede ser analizado mediante la teoría de redes. La linealidad o no del circuito equivalente dependerá de las relaciones intrínsecas entre las variables del convertidor.

La universalidad de este método de modelación en su aplicación a diversos sistemas físicos, así como la sistematización existente para el análisis de los circuitos eléctricos, hacen de los circuitos equivalentes una herramienta fundamental en este campo.

4. Modelación directa

Las ecuaciones de Maxwell sintetizan el modelo matemático completo del comportamiento físico del electromagnetismo. Para esta finalidad se utilizan dos principios que relacionan los campos eléctricos y magnéticos. Estas dos relaciones físicas fundamentales se conocen como ley de Faraday y ley de Ampère, respectivamente. Estas dos leyes en su forma diferencial imponen condiciones sobre los rotacionales de dos vectores que representan estos campos, la determinación biunívoca de estos campos requiere dos condiciones adicionales sobre la divergencia de estos vectores. Estas dos condiciones se denominan las leyes de Gauss para el campo eléctrico y para el campo magnético. Además de estas cuatro leyes son necesarias las denominadas relaciones constitutivas de la materia que relacionan los campos con las propiedades electromagnéticas de los materiales. Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son:

1. La ley de Faraday que relaciona el rotor del campo eléctrico con las variaciones temporales de la densidad del campo magnético:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

2. La ley de Ampère que relaciona el rotor del campo magnético con la densidad de corriente y con las variaciones temporales de la densidad del campo eléctrico:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

3. La ley de Gauss para el campo eléctrico que relaciona la divergencia de la densidad del campo eléctrico con la densidad de carga eléctrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7)$$

4. La ley de Gauss para el campo magnético que expresa la inexistencia de los monopolos magnéticos indicando que la divergencia de la densidad del campo magnético es cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

5. Las relaciones constitutivas de la materia que relacionan las densidades de campo eléctrico, de campo magnético y de corriente con las intensidades de campo eléctrico y magnético respectivamente:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (10)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (11)$$

donde:

E	intensidad del campo eléctrico,
H	intensidad de campo magnético,
D	densidad del campo eléctrico,
B	densidad del campo magnético,
J	densidad de corriente,
ρ	densidad de carga,
ϵ	permitividad dieléctrica del medio,
μ	permeabilidad magnética del medio, y
σ	conductividad eléctrica del medio.

Si se recuerda el teorema del cálculo diferencial de vectores el cual establece que la divergencia del rotor de un vector siempre es nula, de las ecuaciones 6 y 7 se puede obtener la ley de la continuidad de la carga:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Este conjunto de ecuaciones vectoriales en diferenciales parciales, define el comportamiento electromagnético en un punto cualquiera del espacio. La determinación de los campos en sistemas relativamente complejos, partiendo de las ecuaciones anteriores, requiere la selección de un sistema de coordenadas apropiado que simplifique la integración de las ecuaciones diferenciales sujetas a unas condiciones de contorno y una geometría bien definida.

Las fuerzas se determinan a partir de estos campos, aplicando la ley de Lorenz:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13)$$

donde:

- F** fuerza sobre la partícula de carga eléctrica , y
- v** es la velocidad de la partícula cargada.

La expresión 13 indica que la única diferencia apreciable, desde el punto de vista de las interacciones electromagnéticas, entre el campo eléctrico **E** y el campo magnético **H**, se refiere al sistema de referencia utilizado. Las interacciones que en un sistema de referencia fijo son atribuidas a la presencia de un campo magnético, en un sistema de referencia solidario con una carga en movimiento se interpreta como efecto de una iteración del campo eléctrico sobre la partícula. Los conceptos de campo eléctrico y magnético son relativos al sistema de referencia utilizado para describir el fenómeno.

Algunos convertidores electromecánicos son lo bastante simples en su geometría como para ser analizados de forma práctica mediante este procedimiento. Una de las aplicaciones clásicas de la ley de Lorenz expresada mediante la ecuación 13, consiste en calcular la fuerza eléctrica que aparece sobre un conductor rectilíneo de longitud por el cual circula una corriente eléctrica de magnitud y dirección paralela al conductor:

$$\mathbf{F} = l \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) \quad (14)$$

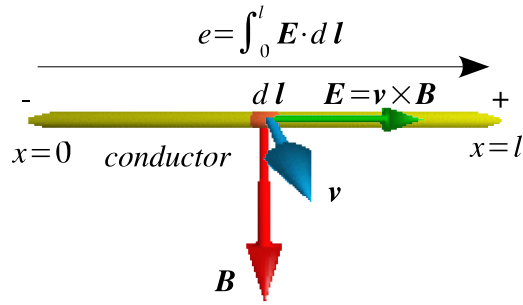


Figura 1: Convertidor electromagnético elemental

En la actualidad existen algoritmos que calculan campos eléctricos o magnéticos mediante métodos tales como el de los elementos finitos o el de los momentos. Estas herramientas son de gran utilidad para el diseño de los convertidores electromagnéticos, debido a que utilizan información geométrica y producen resultados en este mismo ámbito. Realizando ciertas simplificaciones, es posible aplicar el procedimiento de cálculo directo de los campos para analizar el comportamiento del convertidor. Las ecuaciones de Maxwell dependen del tiempo, este hecho complica notablemente la solución de los problemas electromagnéticos. La solución moderna a esto, consiste en descomponer las excitaciones transitorias mediante la transformada rápida de Fourier, para analizar por separado cada una de las excitaciones sinusoidales del espectro discreto de frecuencias. Una vez realizado el análisis para cada frecuencia, se aplica el principio de superposición para determinar la respuesta dinámica del sistema.

Tal vez la máquina eléctrica más simple es la que se representa en la figura 1. Este dispositivo es un *convertidor electromagnético elemental* y está constituido solamente por un conductor rectilíneo, moviéndose ortogonalmente a un campo magnético uniforme.

En la figura 1, el conductor longitudinal se mueve en el interior de un campo magnético \mathbf{B} ,

siendo:

- \mathbf{E} es el vector intensidad de campo eléctrico.
- e es la fuerza electromotriz.
- \mathbf{B} es el vector densidad de campo magnético.
- \mathbf{v} es el vector velocidad del conductor lineal.

Las variables anteriores se relacionan a partir de la ecuación 13, considerando que no existe campo eléctrico externo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{15}$$

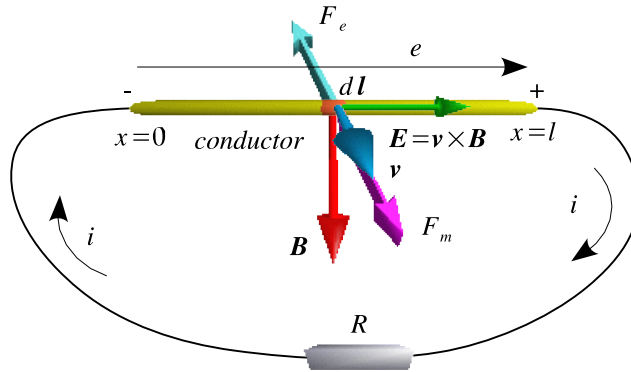


Figura 2: Corriente circulando por un conductor

Si en la ecuación 15, se supone que el campo magnético \mathbf{B} es uniforme en todos los puntos del conductor y la velocidad \mathbf{v} es constante, la fuerza electromotriz e de todo el conductor es:

$$e = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (16)$$

Si al conductor anterior se le conecta una resistencia entre sus extremos, circularán cargas por el conductor y se producirá una corriente de valor:

$$i = \frac{e}{R} \quad (17)$$

En el conductor de la figura 2 se produce una fuerza \mathbf{F}_e , que se opone al movimiento. Esta fuerza puede calcularse a partir de la *relación de Lorentz* 13, expresada como función de la corriente i por el conductor:

$$\mathbf{F}_e = l \cdot i \times \mathbf{B} \quad (18)$$

La fuerza calculada en la expresión anterior muestra que el sistema se opone a la extracción de energía. Para obtener la energía, es necesario forzar el movimiento del conductor. Si no actúa ninguna otra fuerza que mantenga el movimiento, y si la velocidad es diferente de cero, el sistema tendrá un movimiento retardado de aceleración negativa. El conductor convertirá la energía que estaba inicialmente almacenada en su masa, en pérdidas en la resistencia R del circuito externo. En estas condiciones, la velocidad decae exponencialmente a cero.

Para mantener una velocidad constante en el conductor de la figura 2, es necesario aplicar una fuerza externa al conductor que se oponga a \mathbf{F}_e . Esta fuerza es de origen mecánico y se denomina \mathbf{F}_m . En la figura 2 se observa el *equilibrio de fuerzas* necesario para mantener constante la velocidad \mathbf{v} del conductor.

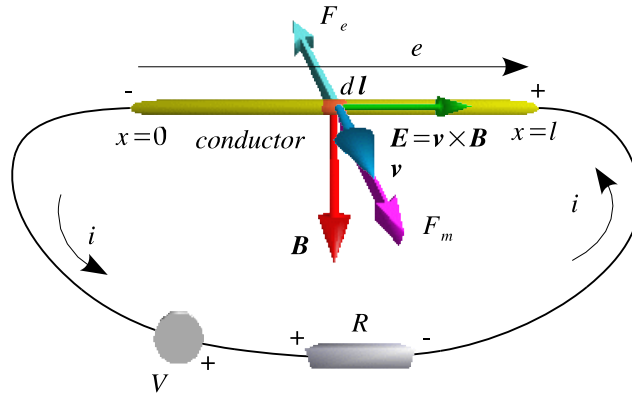


Figura 3: Conductor alimentado por una fuente de tensión V

El sistema mecánico entrega potencia al sistema eléctrico para mantener la velocidad v , la potencia mecánica instantánea entregada por el sistema externo se calcula mediante la relación siguiente:

$$P_m = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} \quad (19)$$

y la potencia eléctrica instantánea en el conductor es:

$$P_e = e \cdot i \quad (20)$$

Si se realiza un *balance de potencia*, considerando que las cantidades vectoriales son ortogonales entre si, se obtiene el siguiente resultado:

$$P_m = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v} = i \cdot B \cdot v \cdot l = i \cdot E \cdot l = i \cdot e = P_e \quad (21)$$

La ecuación 21 demuestra que la conversión de energía mecánica en energía eléctrica ha sido completa. En el proceso no hay pérdidas debido a que la potencia disipada en la resistencia del circuito es externa a la máquina.

Añadiendo una fuente de tensión al conductor anterior con el conductor inicialmente en reposo, tal como se ilustra en la figura 3, la fuente de tensión V hace circular una corriente i por el circuito. Esta corriente produce, según la ecuación 18 una fuerza eléctrica F_e . Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el conductor, este comienza a moverse con aceleración.

Cuando el conductor se mueve en un campo magnético, se origina a su vez un campo eléctrico \mathbf{E} . Como se puede apreciar en la figura 3, la fuente de tensión produce una corriente que se opone al campo eléctrico \mathbf{E} inducido por el movimiento. La corriente se puede calcular como:

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (22)$$

De esta forma, en la medida que aumenta la fuerza electromotriz e inducida por el movimiento del conductor, disminuye la corriente en el circuito. Al decrecer la corriente, se reduce la fuerza eléctrica sobre el conductor. El proceso continúa hasta que la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e se hace cero. En esta condición la tensión aplicada por la batería V es igual a la fuerza electromotriz e , inducida por el movimiento del conductor en el campo magnético y la corriente i se anula.

La velocidad del conductor en que la fuerza eléctrica es cero, debido al equilibrio entre la tensión aplicada y la fuerza electromotriz inducida por el movimiento, se define como velocidad sincrónica del conductor. En esta situación:

$$e = V = l \cdot v_s \cdot B \quad (23)$$

donde v_s es la velocidad sincrónica y se calcula de la expresión anterior como:

$$v_s = \frac{V}{l \cdot B} \quad (24)$$

Una vez que el conductor alcanza la velocidad sincrónica ($V = e$; $i = 0$), si se aplica una fuerza resistente al conductor, el sistema comienza a retardarse y la fuerza electromotriz inducida e disminuye, aumenta la corriente en el conductor debido a que la tensión V de la batería supera a la fuerza electromotriz e . La aceleración o retardo del sistema se puede calcular aplicando convenientemente la *segunda ley de Newton*:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{M} \sum \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m}{M} \quad (25)$$

donde:

$\sum \mathbf{F}$	es la sumatoria de fuerzas aplicadas.
\mathbf{F}_e	es la fuerza eléctrica sobre el conductor.
\mathbf{F}_m	es la fuerza mecánica resistente.
M	es la masa del conductor.

Cuando la fuerza mecánica \mathbf{F}_m equilibra a la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e , la aceleración es cero y en ese instante se cumple que:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_e = l \cdot B \cdot i = l \cdot B \cdot \left(\frac{V - B \cdot l \cdot v_0}{R} \right) \quad (26)$$

De la ecuación 26 se obtiene la velocidad de operación v_0 en función de la fuerza mecánica resistente:

$$v_0 = \frac{V - \frac{F_m \cdot R}{B \cdot l}}{B \cdot l} \quad (27)$$

La velocidad v_0 corresponde a la operación de la máquina cuando las fuerzas eléctricas y mecánicas sobre el conductor están en equilibrio. Si en este momento se elimina la fuerza resistente \mathbf{F}_m , el conductor se acelera en la dirección de la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e hasta alcanzar nuevamente la velocidad sincrónica.

La exposición anterior permite resumir en seis ecuaciones los principios que rigen la conversión electromecánica de energía:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (28)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (29)$$

$$e = \int_o^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cdot l = v \cdot B \cdot l \quad (30)$$

$$F = \int_o^l \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = f \cdot l = i \cdot B \cdot l \quad (31)$$

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (32)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{M} \mathbf{F}_a = \frac{\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m}{M} \quad (33)$$

En el sistema de ecuaciones representado por las expresiones 28 a 33 se destacan los siguientes puntos:

1. La ecuación 30 calcula una variable eléctrica (e) en función de una variable mecánica (v) y el campo (B).
2. La ecuación 31 determina una variable mecánica (F) en función de una variable eléctrica (i) y el campo (B).
3. Las ecuaciones 30 y 31 dependen del conductor y del campo en el cual está inmerso, por esta razón se denomina las del convertidor electromecánico.
4. Las ecuaciones 32 y 33 representan las relaciones entre el conductor - *máquina eléctrica* - y el resto del universo. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de ligazón*, *ecuaciones de borde*, *ecuaciones de contorno* o *ecuaciones de frontera*.

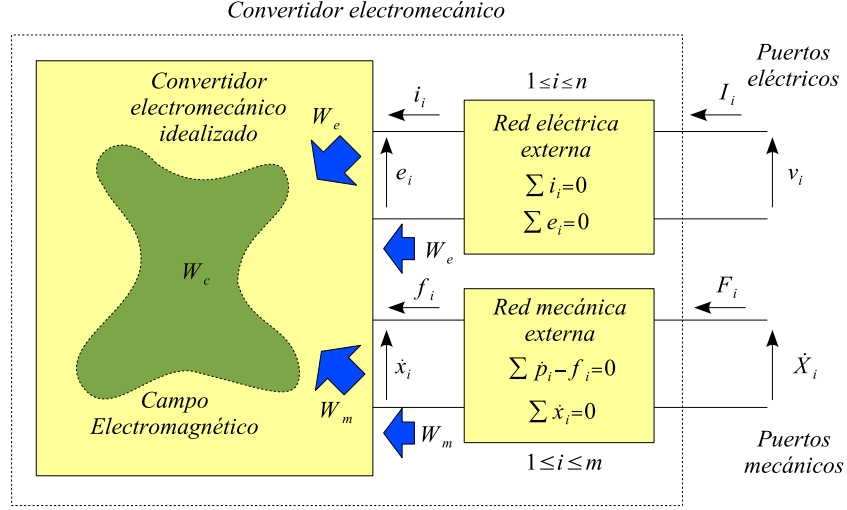


Figura 4: Convertidor electromecánico generalizado

5. Principio de los trabajos virtuales

Durante las décadas de los 40's y 50's se realizaron esfuerzos importantes por sistematizar el análisis de los convertidores electromecánicos de energía. Algunos de estos trabajos sentaron las bases para el desarrollo de los diferentes modelos.

Los convertidores electromecánicos de energía poseen puertos o entradas por donde se produce el intercambio de energía eléctrica y mecánica. Cada uno de estos puertos está definido por dos variables; un flujo y un esfuerzo. Los puertos eléctricos se pueden definir mediante variables tales como la corriente, la carga eléctrica, la fuerza electromotriz o el enlace de flujo. Los puertos mecánicos por otra parte pueden estar definidos por la fuerza, el par eléctrico, la velocidad lineal o angular, y la posición lineal o angular respectivamente. Las pérdidas pueden ser consideradas mediante conexiones de elementos circuitales externos al convertidor conservativo idealizado. En la figura 4 se ilustra esta idea aplicada a un convertidor electromecánico general.

Cada puerto eléctrico o mecánico, está definido mediante dos variables, una correspondiente a un flujo y la otra a un esfuerzo. Es posible definir una función arbitraria que agrupe este par de variables en cada puerto del convertidor. Tradicionalmente esta función ha sido la potencia, definida por el producto de las dos variables. Para los puertos eléctricos la potencia se define como el producto de la fuerza electromotriz por la corriente:

$$p_{e_i} = e_i \cdot i_i \quad (34)$$

En los puertos mecánicos, por otra parte, la potencia se determina mediante el producto de fuerza por velocidad en el caso de movimiento lineal, y por el producto entre par y velocidad

angular en los movimientos rotativos:

$$\begin{cases} p_{m_k} = F_{m_k} \cdot \dot{x}_k, & \text{si el movimiento es de traslación} \\ p_{m_k} = \tau_{m_k} \cdot \dot{\theta}_k, & \text{si el movimiento es de rotación} \end{cases} \quad (35)$$

Integrando las funciones de potencia eléctrica 34, con respecto al tiempo se obtienen las definiciones de los intercambios de la energía eléctrica:

$$\Delta W_{e_k} = \int_{t_0}^{t_f} p_{e_k} dt = \int_{t_0}^{t_f} e_k i_k dt \quad (36)$$

Integrando las funciones de potencia mecánica 35, con respecto al tiempo se obtienen las siguientes definiciones de los intercambios de la energía mecánica:

$$\Delta W_{m_k} = \int_{t_0}^{t_f} p_{m_k} dt = \int_{t_0}^{t_f} F_{m_k} \dot{x}_k dt \quad \text{ó} \quad \int_{t_0}^{t_f} \tau_{e_k} \dot{\theta}_i dt \quad (37)$$

La fuerza electromotriz e_k , de un sistema conservativo se puede determinar derivando con respecto al tiempo el enlace de flujo λ_k . La corriente eléctrica i_k también se puede obtener derivando con respecto al tiempo la carga eléctrica q_k . Introduciendo estas dos ideas en la expresión 36, esta se puede reescribir eliminando el tiempo como variable de integración:

$$\Delta W_{e_k} = \int_{t_0}^{t_f} e_k i_k dt = \int_{t_0}^{t_f} e_k \frac{dq_k}{dt} dt = \int_{q_0}^{q_f} e_k dq_k \quad \text{ó} \quad \int_{t_0}^{t_f} i_k \frac{d\lambda_k}{dt} dt = \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} i_k d\lambda_k \quad (38)$$

Realizando el mismo procedimiento con la expresión 37 se obtiene:

$$\Delta W_{m_k} = \int_{t_0}^{t_f} p_{m_l} dt = \int_{t_0}^{t_f} F_{e_l} \dot{x}_l dt = \int_{x_0}^{x_f} F_{e_l} dx_l = \quad \text{ó} \quad \int_{\theta_0}^{\theta_f} \tau_{e_l} d\theta_l \quad (39)$$

Cuando las expresiones 38 y 39 son independientes del tiempo, la energía dependerá solamente del valor instantáneo de las variables de estado del sistema. Se dice en este caso que la energía es una función de estado que cumple con las dos condiciones básicas de este tipo de funciones: tiene un valor único para un conjunto determinado de las variables de estado, y es independiente del tiempo. Si se dispone de una función que depende del valor instantáneo de las variables de estado, y no depende del tiempo, ni de la historia del sistema, ni de las derivadas de las variables de estado, las iteraciones del convertidor electromecánico se pueden expresar con relativa sencillez.

Para integrar las expresión 38, es necesario conocer en forma explícita las relaciones entre la fuerza electromotriz y la carga, o entre la corriente eléctrica y el enlace de flujo. La solución estática o de orden cero de las ecuaciones de Maxwell aplicadas a la geometría del convertidor determinan suficientemente estas relaciones. La evaluación de las expresiones presentes en 39 para la energía mecánica puede ser mucho más compleja. Por esta razón es preferible evaluar la energía eléctrica o magnética para obtener la energía mecánica realizando los correspondientes balances de energía. La fuerza o el par producido por el convertidor se puede calcular con este balance de energía.

Considerando en forma un tanto arbitraria, que por algunos puertos se inyecta energía al convertidor y que por otros se extrae parte de esta energía, es necesario indicar que el

balance global puede ser diferente de cero, debido principalmente a que una cierta cantidad de la energía introducida en el sistema se acumula temporal o indefinidamente dentro de los campos eléctricos, magnéticos o mecánicos del propio convertidor.

Si los puertos mecánicos se encuentra en una posición fija, no existe intercambio de energía mecánica en el sistema, y toda la energía inyectada en los puertos eléctricos se acumula en los campos conservativos del convertidor, eléctricos o magnéticos. Definiendo la existencia de n puertos eléctricos, de los cuales h están formados por circuitos donde se almacena campo eléctrico, y el resto por circuitos que almacenan campo magnético, se puede evaluar la energía acumulada en estos campos mediante la siguiente expresión:

$$\Delta W_c(q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m) = \quad (40)$$

$$\int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0; x_1, \dots, x_m}^{q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m} \left[\sum_{i=1}^h e_i(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_h; x_1, \dots, x_m) d\tilde{q}_i + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \sum_{i=h+1}^n i_i(\tilde{\lambda}_{h+1}, \dots, \tilde{\lambda}_n; x_1, \dots, x_m) d\tilde{\lambda}_i \right]$$

Para determinar la fuerza eléctrica en el nodo mecánico j , se realiza un balance de energía, desplazando un diferencial dx_j la coordenada del eje mecánico, y se mantienen constantes las posiciones mecánicas del resto de los nodos, $dx_k = 0; \forall k \neq j$:

$$dW_c(q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m) = dW_m + dW_e = f_{e_j} dx_j + \sum_{i=1}^n e_i i_i dt \quad (41)$$

La carga eléctrica q_i se puede expresar en función de las fuerzas electromotrices de los puertos eléctricos y de las posiciones x_j de los puertos mecánicos. Por otra parte, el enlace de flujo λ_i se puede expresar en función de las corrientes inyectadas en los puertos magnéticos y de las posiciones de los puertos mecánicos x_j . Utilizando como variables independientes las fuerzas electromotrices, las corrientes y las posiciones de los ejes mecánicos; se tiene:

$$q_i = q_i(e_1, \dots, e_h; x_1, \dots, x_m), \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (42)$$

$$\lambda_i = \lambda_i(i_{h+1}, \dots, i_n; x_1, \dots, x_m), \quad \forall i = h+1, \dots, n \quad (43)$$

$$W_c = W_c(e_1, \dots, e_h; i_{h+1}, \dots, i_n; x_1, \dots, x_m) \quad (44)$$

De la expresión 41 se puede despejar la fuerza eléctrica:

$$f_{e_j} dx_j = dW_c - \sum_{i=1}^h e_i dq_i - \sum_{i=h+1}^n i_i d\lambda_i \quad (45)$$

A partir de la definición 40, el diferencial de la energía acumulada en los campos eléctricos y magnéticos se puede expresar como:

$$dW_c(q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m)$$

$$dW_c = \sum_{i=1}^h \frac{\partial W_c}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=h+1}^n \frac{\partial W_c}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial W_c}{\partial x_j} dx_j \quad (46)$$

Además:

$$dq_i(e_1, \dots, e_h; x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^h \frac{\partial q_i}{\partial e_k} de_k \quad (47)$$

$$d\lambda_i(i_{h+1}, \dots, i_n; x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=h+1}^n \frac{\partial \lambda_i}{\partial i_k} di_k \quad (48)$$

Reemplazando los diferenciales 46, 47 y 48 en la expresión 45, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f_{e_i} dx_j &= \left(\frac{\partial W_c}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^h e_i \frac{\partial q_i}{\partial x_l} - \sum_{i=h+1}^n i_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \right) dx_j + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^h \left(\frac{\partial W_c}{\partial e_i} - \sum_{k=1}^h e_k \frac{\partial q_k}{\partial e_i} \right) de_i + \sum_{i=h+1}^n \left(\frac{\partial W_c}{\partial i_i} - \sum_{k=h+1}^n i_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial i_i} \right) di_i \end{aligned} \quad (49)$$

El segundo y el tercer miembro a la derecha de la ecuación 49 son nulos, para demostrar esto es suficiente con derivar parcialmente la expresión 40 y reemplazar el resultado en esos dos términos. Efectuando estas operaciones, se obtiene el siguiente resultado:

$$f_{e_j} = \frac{\partial W_c}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^h e_i \frac{\partial q_i}{\partial x_l} - \sum_{i=h+1}^n i_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \quad (50)$$

Se obtiene una simplificación importante de la expresión 50, cuando se define la función de estado denominada coenergía en el campo W'_c , a partir de la integración por partes de la energía en el campo:

$$\begin{aligned} W_c &= \int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0; x_1, \dots, x_m}^{q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m} \left[\sum_{i=1}^h e_i dq_i + \sum_{i=h+1}^n i_i d\lambda_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^h e_i q_i + \sum_{i=h+1}^n i_i \lambda_i - \int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0; x_1, \dots, x_m}^{q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m} \left[\sum_{i=1}^h q_i de_i + \sum_{i=h+1}^n \lambda_i di_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^h e_i q_i + \sum_{i=h+1}^n i_i \lambda_i - W'_c \end{aligned} \quad (51)$$

Reemplazando el resultado 51, en la expresión de la fuerza 50, se obtiene:

$$f_{e_j} = -\frac{\partial W'_c}{\partial x_j} \quad (52)$$

Utilizando como variables independientes la carga eléctrica q_i en lugar de la fuerza electromotriz e_i , y el enlace de flujo λ_i en lugar de la corriente i_i , se puede demostrar que:

$$dW_c(q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial W_c}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^h \frac{\partial W_c}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=h+1}^n \frac{\partial W_c}{\partial \lambda_i} d\lambda_i \quad (53)$$

$$f_{e_j} = \frac{\partial W_c}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^h \left(\frac{\partial W_c}{\partial q_i} - e_i \right) dq_i + \sum_{i=h+1}^n \left(\frac{\partial W_c}{\partial \lambda_i} - i_i \right) d\lambda_i \quad (54)$$

Simplificando la ecuación 54, con el mismo procedimiento empleado en la expresión 49, se obtiene el siguiente resultado:

$$f_{e_j} = \frac{\partial W_c(q_1, \dots, q_h; \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n; x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} \quad (55)$$

Si las variables independientes del modelo son la fuerza electromotriz y la corriente, el concepto de la coenergía simplifica notablemente la descripción matemática del modelo. Por otra parte cuando las variables independientes son la carga eléctrica y el enlace de flujo, la función de estado denominada energía es preferible en la formulación de las ecuaciones. La selección más adecuada de una u otra función de estado depende por tanto, de la definición previa de las variables dependientes e independientes del modelo.

6. Principios variacionales

El principio de los trabajos virtuales desarrollado en la sección anterior para evaluar las fuerzas internas producidas en los convertidores electromecánicos de energía, está fundamentado en principios diferenciales. Se realiza un incremento infinitesimal en una variable dx_j y se analizan los cambios incrementales que ocurren en el resto de las variables del sistema. Un método alternativo consiste en un postulado general, el cual expresa que todos los sistemas dinámicos siguen una trayectoria que es el extremo¹ de una cierta función integral. Este tipo de procedimiento, de gran generalidad, se denomina método variacional.

Aun cuando la validez de los principios variacionales ha sido demostrada a partir de las leyes fundamentales de la física, y del propio principio de los trabajos virtuales, la generalidad de estos métodos permiten su aplicación a una variedad prácticamente infinita de problemas.

El principio de Hamilton aplicado a los sistemas físicos, constituye la base fundamental del método variacional. Este principio postula que la variación δ de la integral con respecto al tiempo, de una cierta función denominada Lagrangiano \mathcal{L} , es nula cuando se aplica sobre la trayectoria que recorren las variables de estado del sistema, entre unos extremos iniciales $z_i(t_1)$ y finales fijos $z_i(t_2)$. El Lagrangiano \mathcal{L} es una función que depende de las coordenadas z_i , de las primeras derivadas \dot{z}_i , y del tiempo t . Si se define la función integral \mathcal{I} de la función Lagrangiana \mathcal{L} como:

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n; t) dt \quad (56)$$

¹Máximo, mínimo o punto de ensilladura.

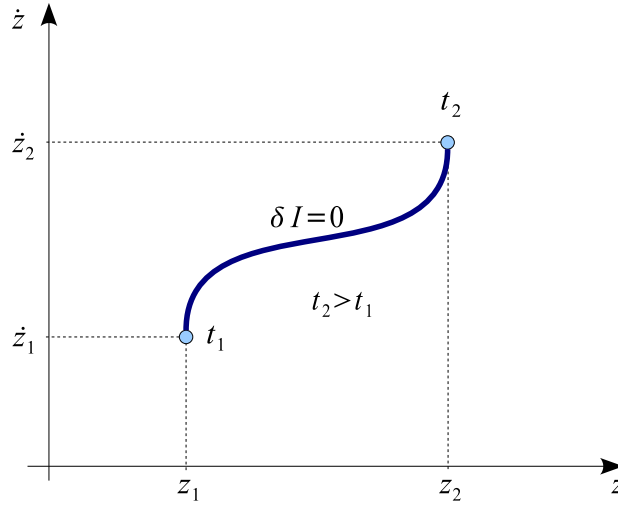


Figura 5: Principio de Hamilton aplicado a una función de una variable

El principio de Hamilton establece que:

$$\delta \mathcal{I} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n; t) dt = 0 \quad (57)$$

Cuando las coordenadas en los puntos extremos de la trayectoria son fijos:

$$\delta z_i(t_1) = 0 ; \delta z_i(t_2) = 0 ; \forall i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (58)$$

En la figura 5 se ilustra el principio de Hamilton aplicado a una función de una sola variable.

El cálculo diferencial permite determinar el valor de las variables \mathbf{x} , que producen los extremos de una función conocida $f(\mathbf{x})$. El cálculo variacional, por otra parte, se orienta a la búsqueda de la función desconocida \mathcal{I} , y las relaciones existentes entre sus respectivas variables, que satisfacen las condiciones de extremo.

Para ilustrar el procedimiento básico empleado por el cálculo variacional, se considera la función \mathcal{I} , definida como la integral entre los instantes t_1 y t_2 de una función desconocida \mathcal{L} . La función depende de la variable desconocida $z(t)$, de su correspondiente derivada $\dot{z}(t)$, y del tiempo t como variable independiente:

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(z(t); \dot{z}(t); t) dt \quad (59)$$

El problema variacional consiste en determinar las variables funcionales $z(t)$ y $\dot{z}(t)$, que determinan un extremo de la función \mathcal{L} . Además estas variables deben satisfacer las siguientes condiciones en los puntos extremos:

$$z(t_1) = z_1 ; z(t_2) = z_2 \quad (60)$$

Para resolver el problema, se considera que $z_0(t)$ es la función que determina un extremo de \mathcal{I} . Se escoge una función diferenciable $\eta(t)$, completamente arbitraria pero que se anule en los puntos extremos $z(t_1) = z_1$ y $z(t_2) = z_2$. Con estas definiciones se puede establecer la función genérica $z(t)$, donde α es un coeficiente arbitrario:

$$z(t) = z_0(t) + \alpha\eta(t) \quad (61)$$

La expresión 61 satisface las condiciones de contorno en los puntos extremos, y coincide con la solución cuando el valor del coeficiente α tiende a cero. Sustituyendo la función 61 en la integral 59, se obtiene:

$$\mathcal{I}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(z_0(t) + \alpha\eta(t); \dot{z}_0(t) + \alpha\dot{\eta}(t); t) dt \quad (62)$$

La función 62 depende solamente del coeficiente α , por esta razón su extremo se puede obtener derivando directamente esta expresión con respecto a α , e igualando el resultado a cero. El extremo de la función se obtiene necesariamente cuando el valor de α es cero:

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\alpha}(\alpha = 0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \eta(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{\eta}(t) \right] dt \quad (63)$$

Definiendo las variaciones de la función $z(t)$ y de su derivada $\dot{z}(t)$, como la diferencia entre la función actual y el valor que produce el extremo de la función Lagrangiana \mathcal{L} ; se tiene:

$$\delta z \equiv z(t) - z_0(t) = \alpha\eta(t) \quad (64)$$

$$\delta \dot{z} \equiv \dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) = \alpha\dot{\eta}(t) \quad (65)$$

La variación de la función Lagrangiana $\delta \mathcal{L}$, se define como:

$$\delta \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(z(t, \alpha); \dot{z}(t, \alpha); t) - \mathcal{L}(z_0(t, \alpha); \dot{z}_0(t, \alpha); t) \quad (66)$$

Al expandir el primer término a la derecha de la expresión 66, utilizando las definiciones 64 y 65, se obtiene el siguiente resultado:

$$\delta \mathcal{L} = [z(t, \alpha) - z_0(t, \alpha)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + [\dot{z}(t, \alpha) - \dot{z}_0(t, \alpha)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} \quad (67)$$

De la expresión 63, y del resultado obtenido en 67, se demuestra que:

$$\alpha \frac{d\mathcal{I}(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} \right] dt = 0 \quad (68)$$

Debido a que el operador derivada es lineal, se obtiene:

$$\delta \dot{z} = \delta \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(\delta z) \quad (69)$$

Utilizando la identidad 69, la condición del principio de Hamilton que establece la necesidad de extremos fijos en la trayectoria, e integrando por partes el segundo término del variacional 68, resulta:

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \right] \delta z dt = 0 \quad (70)$$

El integrando de la expresión 70, define la condición que debe satisfacer la función Lagrangiana \mathcal{L} , para ser un extremo de la función integral \mathcal{I} . Esta condición se conoce como ecuación de Euler-Lagrange y se puede expresar como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \quad (71)$$

Si la función Lagrangiana \mathcal{L} , depende de n variables de estado independientes entre si, de sus n primeras derivadas y del tiempo t , las ecuaciones 70 y 71 se pueden generalizar, obteniendo el siguiente resultado:

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} \right) \right] \delta z_i \right\} dt = 0 \quad (72)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la función Lagrangiana multivariable es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} \right) = 0 \quad : \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (73)$$

Cuando se conoce la función Lagrangiana multivariable \mathcal{L} , asociada con el sistema físico que se está modelando, el comportamiento del convertidor electromecánico de energía queda determinado completamente por las n ecuaciones diferenciales definidas por la expresión 73. El método variacional obtiene directamente las ecuaciones de Kirchhoff para los nodos y las mallas de la red eléctrica conservativa, las relaciones que garantizan la continuidad del espacio, y el principio de d'Alambert sobre el equilibrio de fuerzas en un sistema dinámico.

Si el sistema físico posee n grados de libertad, su comportamiento dinámico puede ser caracterizado mediante n coordenadas, las n derivadas de estas coordenadas, y el tiempo t como variable independiente. Cuando el Lagrangiano del sistema es independiente del tiempo se convierte en una función de estado. En general, el diferencial total de la función Lagrangiana es:

$$d\mathcal{L}(z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n; t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} d\dot{z}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (74)$$

Cuando la función de Lagrange es independiente del tiempo, el diferencial 74 se puede obtener recorriendo un camino arbitrario de integración, debido a que en este caso el Lagrangiano es una función de estado. Un método para evaluar esta función consiste en variar inicialmente las coordenadas z_i , mientras se mantienen nulas las velocidades \dot{z}_i . Posteriormente se fijan las coordenadas y se integra la trayectoria variando las velocidades \dot{z}_i . De esta forma, la función de Lagrange \mathcal{L} , queda dividida en dos términos, el primero que depende exclusivamente del valor final de las coordenadas generalizadas z_i , y el segundo que depende de

estos mismos valores y de las velocidades respectivas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_{z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0}^{z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n} \int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0}^{z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n} d\mathcal{L}(z'_1, \dots, z'_n; \dot{z}'_1, \dots, \dot{z}'_n) = \\
&= \int_{0, \dots, 0}^{z_1, \dots, z_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(z'_1, \dots, z'_n; 0, \dots, 0)}{\partial z'_i} dz'_i + \dots \\
&\quad \dots + \int_{0, \dots, 0}^{\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(z'_1, \dots, z'_n; \dot{z}'_1, \dots, \dot{z}'_n)}{\partial \dot{z}'_i} d\dot{z}'_i
\end{aligned} \tag{75}$$

El término de la función Lagrangiana que depende exclusivamente de las coordenadas, es semejante al concepto físico de energía potencial. El otro término está asociado con las velocidades de las variables, y por tanto con concepto de energía cinética. La derivada parcial de la función de Lagrange, con respecto a cada una de las coordenadas generalizadas se define como la fuerza generalizada. La fuerza generalizada representa un campo potencial, o en otras palabras, un campo que depende de la posición. La integral de una función potencial con respecto a las coordenadas z_i , definen la energía potencial generalizada W_p . El segundo término de la función 75, es más complejo, depende de los valores finales de las coordenada z_i y de sus derivadas \dot{z}_i . Realizando una asociación con el sistema mecánico, se puede indicar que el término que acompaña al diferencial de velocidad $d\dot{z}_i$, es un momentum generalizado. La integral del momentum generalizado con respecto a la velocidad generalizada es la coenergía cinética generalizada W'_k , tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
dW &= f \cdot dz ; f = \frac{dp}{dt} ; dz = \dot{z} \cdot dt \Rightarrow \\
dW &= \frac{dp}{dt} \dot{z} dt = \dot{z} dp \Rightarrow \\
W &= \int dW = \dot{z} p - \int p \cdot d\dot{z} = \dot{z} p - W'
\end{aligned} \tag{76}$$

En consecuencia, la función Lagrangiana se puede obtener superponiendo la coenergía cinética y la energía potencial que caracterizan un determinado sistema físico. Una de las principales ventajas de esta definición consiste en la posibilidad de ser aplicada en la modelación de sistemas físicos no lineales. La mayoría de los convertidores electromecánicos tienen estas características, por esta razón el método resulta de gran utilidad en su modelación.

En el sistema electromecánico existen al menos dos posibilidades para escoger las coordenadas eléctricas. Una de las posibilidades consiste en asignar el valor de la carga eléctrica q a la coordenada generalizada z . Según esta idea, resulta que la velocidad generalizada \dot{z} , corresponderá entonces con la corriente eléctrica i . La fuerza generalizada f será la fuerza electromotriz e . El momentum generalizado p coincide con el enlace de flujo λ .

Por otra parte, si se asigna el enlace de flujo λ a la variable generalizada z , la fuerza electromotriz e corresponderá con la velocidad generalizada \dot{z} . En este caso la fuerza generalizada f será igual a la corriente i , y el momentum generalizado p coincidirá con la carga eléctrica q . Para el sistema mecánico, la posición x es la coordenada generalizada, la velocidad \dot{x} ,

Cuadro 1: Posibles variables generalizadas para un sistema electromecánico.

Variabes Generalizadas	Sis. Mecánico	Sis. Eléctrico I	Sis. Eléctrico II
Coordenada z_i	x_i	q_i carga	λ_i enlace
Velocidad \dot{z}_i	\dot{x}_i	i_i corriente	e_i FEM
Fuerza f_i	$k_i x_i$ resorte	e_i FEM	i_i corriente
Momentum p_i	$M_i \dot{x}_i$	λ_i enlace	q_i carga

corresponde a la derivada de la coordenada generalizada \dot{z} , la fuerza generalizada es la fuerza mecánica, y el momentum generalizado está asociado con el momentum mecánico $M\dot{x}$. En la tabla 1 se resumen estas dos definiciones alternativas de las variables generalizadas que se pueden utilizar en la modelación de los convertidores electromecánicos.

El sistema de ecuaciones diferenciales 73, modela sistemas físicos conservativos. Sin embargo, la inclusión de fenómenos no conservativos requiere algunas consideraciones adicionales. Fundamentalmente existen dos tipos de fuerzas generalizadas no conservativas en la naturaleza, las debidas a fuentes externas al sistema dependientes tan solo del tiempo t , y las de origen disipativo, dependientes de las variables de velocidad generalizada \dot{z} . Las fuerzas generalizadas no conservativas $F_i(t)$ pueden ser superpuestas a las fuerzas generalizadas conservativas $f_i(z_1, \dots, z_n; t)$ para definir un Lagrangiano no conservativo \mathcal{L}_F . Los términos disipativos, dependientes de las coordenadas de velocidad generalizada pueden ser considerados incluyendo la función de coenergía cinética no conservativa W'_F , término cuya estructura es adecuada para hacer coincidir los principios variacionales con las leyes físicas. Con estas ideas, el diferencial total del Lagrangiano de un sistema físico no conservativo se puede expresar como:

$$d\mathcal{L}(z_1, \dots, z_n; \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n; t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial z_i} + F_i(t) \right] dz_i + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{z}_i} d\dot{z}_i \right] + \frac{1}{2} r_i \dot{z}_i^2 dt \right\} \quad (77)$$

donde el término $\frac{1}{2} r_i \dot{z}_i^2$ propuesto por Rayleigh, es la mitad de la potencia de pérdida instantánea consumida por un elemento disipativo. Integrando el diferencial total del Lagrangiano de un sistema no conservativo $d\mathcal{L}_F$, aplicando las condiciones de Euler-Lagrange al Lagrangiano \mathcal{L}_F , y expresando los resultados en función del Lagrangiano conservativo \mathcal{L} , se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = F_i(t) - r_i \cdot \dot{z}_i ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (78)$$

Esta nueva función Lagrangiana, depende del tiempo y ha dejado de ser una función de estado, pero permite obtener directamente las ecuaciones diferenciales de un sistema no conservativo.

7. Transformaciones del sistema de coordenadas

En las secciones anteriores se han presentado tres métodos que permiten modelar matemáticamente sistemas físicos en general, y los convertidores electromecánicos de energía en

particular. En muchas aplicaciones, las ecuaciones resultantes de estos modelos pueden ser complejas, en parte debido al número de grados de libertad del problema, y también por la utilización de un sistema de coordenadas determinado. Si el modelo resultante es no-lineal, la solución numérica de las ecuaciones diferenciales requiere la evaluación directa de las derivadas de las variables de estado del sistema. Este proceso puede ser muy costoso desde el punto de vista numérico cuando las variables están fuertemente acopladas.

En los sistemas lineales, las técnicas modales permiten desacoplar los sistemas multivariantes, redefiniendo las variables de estado a través de una transformación de las coordenadas primitivas. En algunas ocasiones, esta técnica puede ser aplicada parcialmente en sistemas no lineales. Los modelos de los convertidores electromecánicos en las coordenadas naturales o primitivas dependen fuertemente de la posición de los ejes o puertos mecánicos. La técnica de transformación de coordenadas pueden reducir o eliminar estas dependencias, incorporando nuevas variables, con un comportamiento dinámico o de régimen permanente más lento.

Los sistemas lineales pueden ser representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, con la siguiente forma:

$$[\dot{z}] = [A] [z] + [B] [u(t)] \quad (79)$$

donde:

$[z]$ es el vector de variables de estado,
 $[A]$ es la matriz de transición de estado, y
 $[B] [u(t)]$ es el efecto de las fuentes independientes.

Para este tipo de sistemas siempre es posible determinar una transformación de coordenadas $[T]$, que cumple con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} [z] &= [T] [z'] \quad ; \quad [\dot{z}] = [T] [\dot{z}'] \Rightarrow \\ [T] [\dot{z}'] &= [A] [T] [z'] + [B] [u(t)] \Rightarrow \\ [\dot{z}'] &= [T]^{-1} [A] [T] [z'] + [T]^{-1} [B] [u(t)] \end{aligned} \quad (80)$$

Para que el modelo en las nuevas coordenadas esté desacoplado, es necesario que el triple producto sea una matriz cuadrada y diagonal:

$$[T]^{-1} [A] [T] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\gamma_i)_{n \times n} \quad (81)$$

Expresando la matriz de transformación de coordenadas en función de los vectores columna $[T_i]$ que lo componen:

$$[T] = [[T_1] [T_2] \cdots [T_i] \cdots [T_n]] \quad (82)$$

y reemplazando la matriz 82, en la expresión 81, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraico:

$$[A][T_i] - \gamma_i [T_i] = [0] \Rightarrow [[A] - \gamma_i [I]][T_i] = [0] \quad (83)$$

Para que el sistema de ecuaciones 83 tenga solución diferente a la trivial, es necesario que el determinante de la matriz característica del sistema sea cero:

$$\det [[A] - \gamma_i [I]] = 0 \quad (84)$$

La solución de la ecuación característica 84, determina n raíces γ_i , denominadas autovalores o valores propios de la matriz $[A]$. Aplicando la expresión 83, a cada uno de los autovalores γ_i , es posible determinar las relaciones existentes entre los elementos de cada uno de los autovectores $[T_i]$. El conjunto de los n autovectores forman la matriz de transformación de coordenadas que desacoplan el sistema de ecuaciones diferenciales primitivo.

Si el modelo no es lineal, pero puede expresarse de la siguiente forma:

$$[\dot{z}] = [A(z)][z] + [B(z)][u(t)] \quad (85)$$

Una transformación genérica $[T(z)]$ del sistema de coordenadas cumple con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} [z] &= [T(z)][z'] \quad ; \quad [\dot{z}] = [T(z)][\dot{z}'] + \left(\sum_{i=1}^n \dot{z}_i \frac{\partial [T(z)]}{\partial z_i} \right) [z'] \Rightarrow \\ [T(z)][\dot{z}'] &= \left\{ [A(z)][T(z)] - \left(\sum_{i=1}^n \dot{z}_i \frac{\partial [T(z)]}{\partial z_i} \right) \right\} [z'] + [B(z)][u(t)] \Rightarrow \quad (86) \\ [\dot{z}'] &= [T(z)]^{-1} \left\{ [A(z)][T(z)] - \left(\sum_{i=1}^n \dot{z}_i \frac{\partial [T(z)]}{\partial z_i} \right) \right\} [z'] + [T(z)]^{-1} [B(z)][u(t)] \end{aligned}$$

En el caso no lineal, el objetivo principal puede ser eliminar la influencia de alguna de las variables de estado, o de sus derivadas. La técnica modal de los autovalores y los autovectores puede simplificar el modelo en algunos casos. Lógicamente, este procedimiento no tiene la generalidad del caso lineal, pero puede ser de gran utilidad en diversas aplicaciones. Es necesario destacar que cuando la transformación de coordenadas, depende de una o varias de las coordenadas, aparecen términos adicionales en el modelo transformado. La selección de la transformación en estos casos, debe tener en cuenta además, el efecto de los nuevos términos en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

Referencias

- [1] E. Brigham; "*The Fast Fourier Transform and its Applications*," Prentice-Hall International, New York 1989.
- [2] L. Elsgoltz; "*Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*," Editorial MIR, Moscú 1977.

- [3] A. E. Fitzgerald; C. Kingsley, Jr.; A. Kusko; *"Electric Machinery: The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion,"* McGraw-Hill, Third Edition, 1971.
- [4] D. Halliday; R. Resnick; *"Física Parte II,"* John Wiley & Sons, 1974.
- [5] L. F. Harrington; *"Field Computation by Moment Methods,"* Krieger Publishing Company, Malabar, Florida 1968.
- [6] R. Harrington; *"Matrix Methods for Field Problems,"* IEEE Proceedings, Vol. 55, N° 2, Feb. 1967, pp.136-149.
- [7] D. Karnopp; R. Rosenberg; *"System Dynamics: A Unified Approach,"* John Wiley & Sons, 1975.
- [8] G. Kron; *"The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery,"* General Electric Review, Schenectady, New York 1942.
- [9] J. C. Maxwell; *"A Treatise on Electricity and Magnetism,"* Dover Publications, Unabridged Third Edition, Volume one & two, 1954.
- [10] H. P. Neff, Jr.; *"Introductory Electromagnetics,"* John Wiley & Sons, 1991.
- [11] P. P. Silvester; R. L. Ferrari; *"Finite Elements for Electrical Engineers,"* Cambridge University Press, Second edition, 1990.
- [12] D. C. White; H. H. Woodson; *"Electromechanical Energy Conversion,"* John Wiley & Sons, New York 1959.